



INTERNATIONAL CONFERENCE

«Differential Equations and Related Topics»,
dedicated to

IVAN G. PETROVSKII

(1901-1973)

XXV Joint Session of Petrovskii Seminar and Moscow Mathematical Society

BOOK of ABSTRACTS



СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Moscow, May 19-24

2025

<http://petrovskii.math.msu.su>

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«Дифференциальные уравнения и смежные вопросы»

посвященная выдающемуся математику

И. Г. ПЕТРОВСКОМУ

(1901 — 1973)

25-е совместное заседание Московского математического общества
и Семинара имени И.Г.Петровского

Москва, 19 – 24 мая 2025

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Москва, 2025

Международная конференция, посвященная выдающемуся математику И. Г. Петровскому (25-е совместное заседание ММО и Семинара имени И.Г.Петровского): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2025. — 301 с.

Программный комитет

В. А. Садовничий (сопредседатель), В. В. Козлов (сопредседатель), И. В. Астапова (заместитель председателя), А. В. Боровских, А. А. Давыдов, Ю. С. Ильяшенко, И. Т. Кигурадзе, А. А. Коньков, А. Л. Пятницкий, Е. В. Радкевич, О. С. Розанова, И. Н. Сергеев, Д. В. Трещев, А. В. Филиновский, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, Т. А. Шапошникова

Организационный комитет

А. И. Шафаревич (сопредседатель), В. Н. Чубариков (сопредседатель), И. В. Астапова (заместитель председателя), Г. А. Чечкин (заместитель председателя), А. В. Боровских, В. В. Быков, А. Н. Ветехин, А. А. Владимиров, А. Ю. Горицкий, Н. В. Денисова, Т. О. Капустина, Е. С. Карулина, А. А. Коньков, Е. В. Коробко, Д. В. Миллионщиков, В. В. Палин, О. С. Розанова, В. В. Рогачев, М. С. Романов, А. М. Савчук, И. В. Филимонова, А. В. Филиновский, И. А. Шейпак

Конференция поддержана Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова, Механико-математическим факультетом МГУ имени М.В.Ломоносова.

ISBN

© Московский государственный
университет, 2025

INTERNATIONAL CONFERENCE
«Differential Equations and Related Topics»

dedicated to outstanding mathematician

I. G. PETROVSKII
(1901 — 1973)

25th joint session of Moscow Mathematical Society
and I.G.Petrovskii Seminar

Moscow, May 19 – 24, 2025

BOOK of ABSTRACTS

Moscow, 2025

International Conference dedicated to outstanding mathematician
I. G. Petrovskii (25th joint session of Moscow Mathematical Society
and I.G.Petrovskii Seminar): Book of Abstracts. — Moscow: Moscow
University Press, 2025. — 301 P.

Program Committee

V. A. Sadovnichii (Co-Chairman), V. V. Kozlov (Co-Chairman),
I. V. Astashova (Vice-Chairman), A. V. Borovskikh, G. A. Chechkin,
A. A. Davydov, A. V. Filinovsky, Yu. S. Ilyashenko, I. T. Kiguradze,
A. A. Kon'kov, A. L. Piatnitski, E. V. Radkevich, O. S. Rozanova,
I. N. Sergeev, A. S. Shamaev, T. A. Shaposhnikova, D. V. Treshev

Organizing Committee

A. I. Shafarevich (Co-Chairman), V. N. Chubarikov (Co-Chairman),
I. V. Astashova (Vice-Chairman), G. A. Chechkin (Vice-Chairman),
A. V. Borovskikh, V. V. Bykov, N. V. Denisova, I. V. Filimonova,
A. V. Filinovsky, A. Yu. Goritskii, T. O. Kapustina, E. S. Karulina,
A. A. Kon'kov, E. V. Korobko, D. V. Millionshchikov, V. V. Palin,
O. S. Rozanova, V. V. Rogachev, M. S. Romanov, A. M. Savchuk,
I. A. Sheipak, A. N. Vetokhin, A. A. Vladimirov

Conference is supported by Lomonosov Moscow State University,
Department of Mechanics and Mathematics of MSU.

ISBN

© Moscow State University
2025

EVOLUTION OF A LARGE SCALE CHERN SIMONS MAGNETIC FIELD IN EXPANDING SPACE WITH A NEGATIVE SCALAR CURVATURE PARAMETER

AKHMETIEV P.M.
HSE MIEM and IZMIRAN
pmakhmet@mail.ru

We construct a new Yang Mills 3D solution on the space of negative scalar curvature. We discuss a problem of non Abelian gauge symmetry is broken with the assumption that a sectional scalar curvature of the domain is a negative small parameter. In this case we use the following fact: a geometrical scale related with Vassiliev discriminant of magnetic lines coincides with a physical Kolmogorov scale. This gives an estimation of alpha effect by the dispersion of the asymptotic ergodic Hopf invariant in the asymptotic limit with a negative scalar curvature parameter.

We study the problem of breaking non Abelian gauge symmetry in an expanding space with a parameter of negative scalar curvature, which becomes flat at large expansion times and which is called the geodesic flow space of the Lobachevsky plane. At a fairly stable stage of expansion, the alpha effect caused by the influence of scalar curvature on the Kolmogorov MHD spectrum becomes small.

This is joint result with M.S. Dvornikov.

References

- [1] V. I. Arnold and B. A.Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics* Applied Mathematical Sciences, vol. 125, Springer Verlag, New York, 1998 (Moscow Center for Continuous Mathematical Education, Moscow, 2020).
- [2] P.M. Akhmetiev, M.S. Dvornikov, *Invariants of magnetic lines for Yang Mills solutions* Journal of Geometry and Physics 198 (2024) 105102.
- [3] M.S. Dvornikov, P.M. Akhmetiev, *Evolution of a Large Scale Chern Simons Magnetic Field in Expanding Space with a Negative Scalar Curvature Parameter* Physics of Particles and Nuclei (2025) Vol. 56, No. 2, pp. 269274.

FREE BOUNDARIES IN PARABOLIC PROBLEMS WITH HYSTERESIS

APUSHKINSKAYA D.E.

RUDN University, Russia

apushkinskaya@gmail.com

We study solutions of one-space dimensional parabolic equations with a discontinuous hysteresis operator, described by a free interface boundary.

It is established that for transversal initial data from the space $W_q^{2-2/q}$, $q > 3$, the problem is solvable in the space $W_q^{2,1}$, and the free (interface) boundaries are defined by monotone Hölder curves with exponent $1/2$.

For the initial data from the space W_∞^2 , it is proven that the interface boundaries satisfy the Lipschitz condition.

It is also shown that for non-transversal initial data, solutions with an interface boundaries do not exist.

This talk is based on results [1],[2],[3] obtained jointly with N.N. Uraltseva and S.B. Tikhomirov.

References

- [1] Apushkinskaya D.E., Uraltseva N.N. *On regularity properties of solutions to the hysteresis-type problem*. Interfaces Free Bound., 17:1 (2015), 93-115.
- [2] Apushkinskaya D.E., Uraltseva N.N. *Free boundaries in problems with hysteresis*. Philos. Trans. Roy. Soc. A, 373 (2015), 20140271.
- [3] Apushkinskaya D.E., Uraltseva N.N., Tikhomirov S.B. *Properties of the phase boundary in the parabolic problem with hysteresis*. Zap. Nauchn. Semin. POMI, 536 (2024), 26-53.

ON THE RELATION BETWEEN LIMITS OF SOLUTIONS OF THE RICCATI EQUATION AND THE LIMITS OF ROOTS OF ITS RIGHT PART

ASTASHOVA I. V.^{1,2,a}, NIKISHOV V. A.^{1,b}

¹Moscow State University, Russia

²Plekhanov Russian University of Economics, Russia

^aast.diffiety@gmail.com, ^bnikishov1999@yandex.ru

Consider the following equation

$$y' = (y - \alpha_1(x))(y - \alpha_2(x)). \quad (1)$$

Let us further assume that 1) $\alpha_1, \alpha_2 \in C(\mathbb{R})$; 2) $\alpha_1(x) < \alpha_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$; 3) $\alpha := \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \in C^1(\mathbb{R})$; 4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha_j(x) \equiv \alpha_j^\pm \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$; 5) $\alpha_1^+ \neq \alpha_2^+$, $\alpha_1^- \neq \alpha_2^-$. Let's say that the solution y is defined on the interval Δ , if y is defined at each point of the interval Δ . We denote by $\text{Dom}(y)$ the maximum Domain of definition of y . The following theorem generalizes a similar result from [1].

Theorem 1. *All bounded solutions of (1) are stabilizing, and according to the values of their limits, are divided into four types:*

I-st type: $y_- = \alpha_1^-$, $y_+ = \alpha_1^+$; II-nd type: $y_- = \alpha_2^-$, $y_+ = \alpha_1^+$;
III-rd type: $y_- = \alpha_2^-$, $y_+ = \alpha_2^+$; IV-th type: $y_- = \alpha_1^-$, $y_+ = \alpha_2^+$.

Theorem 2. *There exists a unique solution $y_*(\cdot)$ of equation (1) such that it is defined in the neighbourhood of $+\infty$ and $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_*(x) = \alpha_2^+$. There exists a unique solution $y^*(\cdot)$ of equation (1) such that it is defined in the neighbourhood of $-\infty$ and $\lim_{x \rightarrow -\infty} y^*(x) = \alpha_1^-$. Let $x_* := \inf \text{Dom}(y_*) \geq -\infty$, $x^* := \sup \text{Dom}(y^*) \leq +\infty$. The solutions $y^*(\cdot)$ and $y_*(\cdot)$ satisfy exactly one of the following assertions: 1) $x_* \in \mathbb{R}$, $x^* \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_*} y_*(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x^*} y^*(x) = +\infty$; 2) $x_* = -\infty$, $x^* = +\infty$, $y_*(x) > y^*(x)$, $x \in \mathbb{R}$; $y_*(\cdot)$ is the stabilizing solution of the III-rd type, $y^*(\cdot)$ is the stabilizing solution of the I-st type; 3) $x_* = -\infty$, $x^* = +\infty$, $y_*(x) = y^*(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $y_*(\cdot) = y^*(\cdot)$ is the stabilizing solution of the IV-th type.*

Theorem 3. *Assume that statement 1) from Theorem 2 is true. Let $y(\cdot)$ be the solution of (1) defined at the point $x_0 \in \mathbb{R}$. 1. If $x_0 \in \text{Dom}(y_*)$, $y(x_0) < y_*(x_0)$, then $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \alpha_1^+$ and there exists $\underline{x}$ such*

that $x_* \leq \underline{x} < x_0$, $\text{Dom}(y) = (\underline{x}, +\infty)$ and $\lim_{x \rightarrow \underline{x}} y(x) = -\infty$. **2.** If $x_0 \in \text{Dom}(y^*)$, $y(x_0) > y^*(x_0)$, then $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \alpha_2^-$ and there exists $\bar{x}$ such that $x_0 < \bar{x} \leq x^*$, $\text{Dom}(y) = (-\infty, \bar{x})$ and $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} y(x) = +\infty$. **3.** In the remaining case, i.e. if $((x_0 \notin \text{Dom}(y_*)) \text{ or } (x_0 \in \text{Dom}(y_*) \& (y(x_0) > y_*(x_0)))$ and $((x_0 \notin \text{Dom}(y^*)) \text{ or } (x_0 \in \text{Dom}(y^*) \& (y(x_0) < y^*(x_0))))$, there exist $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$ such that $\text{Dom}(y) = (\underline{x}, \bar{x})$ and $\lim_{x \rightarrow \underline{x}} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} y(x) = +\infty$.

Theorem 4. Assume that statement 2) from Theorem 2 is true. Then for any solution $y(\cdot)$ of (1) we have: 1) if $y^* < y < y_*$, then $y(\cdot)$ is stabilizing solution of the II-nd type; 2) if $y > y_*$, then there exists $\bar{x} \in \mathbb{R}$ such that $y(\cdot)$ extends on $(-\infty, \bar{x})$ and $y_- = \alpha_2^-$, $\lim_{x \rightarrow \bar{x}-0} y(x) = +\infty$; 3) if $y < y^*$, then there exists $\underline{x} \in \mathbb{R}$ such that $y(\cdot)$ extends on the interval $(\underline{x}, +\infty)$ and $y_+ = \alpha_1^+$, $\lim_{x \rightarrow \underline{x}+0} y(x) = -\infty$.

Remark 1. Note that if statement 3) of Theorem 2 is true, then (1) has a unique stabilizing solution, $y_*(\cdot) = y^*(\cdot)$, and it has IV-th type. Note that by virtue of Theorem 3, the existence of a solution of the II-nd type for (1) is possible only when statement 2) of Theorem 2 is true. Hence, Theorem 4 generalizes Theorem 3.3.3 [2]. Note that Theorems 2, 3 and 4 imply Theorem 3.3.7 [2] without condition (4). So, it follows from the obtained results that in Theorems 3.3.3 [2] and 3.3.7 [2], condition (4) can be abandoned, and condition (1) can be replaced by weaker condition $\alpha_1, \alpha_2 \in C(\mathbb{R})$, $\alpha := \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \in C^1(\mathbb{R})$.

This research was supported by RFBR (project No 25-11-00133).

References

- [1] Palin V.V., Radkevich E.V. *O povedenii stabiliziruyushchikhsya resheniy dlya uravneniya Rikcati*, Tr. semin. im. I.G. Petrovskogo 31 (2016), 110–133 (In Russian).
- [2] Astashova I. V., Nikishov V. A., *On extensibility and qualitative properties of solutions to Riccati's equation*, Rus. Math. Surveys 79 (2024) No 2, 189–227

ON A SMOOTH EXTREMUM CONTROL PARABOLIC PROBLEM WITH A POINT-WISE OBSERVATION

ASTASHOVA I.V.^{1,2,a}, FILINOVSKIY A.V.^{3,1,b}, LASHIN D.A.^{4,c}

¹Lomonosov Moscow State University, Russia

²Plekhanov Russian University of Economics, Moscow

³Bauman Moscow State Technical University, Russia

⁴SPF "FITO", Moscow, Russia

^aast.diffiety@gmail.com, ^bflnv@yandex.ru, ^cdalashin@gmail.com

Consider the following parabolic mixed problem with coefficients independent of time:

$$u_t = (a(x)u_x)_x + b(x)u_x + h(x)u, \quad (1)$$

$$(x, t) \in Q_T = (0, 1) \times (0, T), \quad T > 0,$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

where the real functions a , b and h are smooth in $\overline{Q}_T$, $0 < a_0 \leq a(x) \leq a_1 < \infty$, $\varphi, \psi \in W_2^2(0, T)$.

Continuing the research of ([1] – [2]), we consider some special quality functional, implemented by the norm of $W_2^1(0, T)$.

Theorem 1. *If $\varphi, \psi \in W_2^2(0, T)$ and $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, then problem (1) – (3) has a unique weak solution $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ (see [3]) with $u_t \in V_2^{1,0}(Q_T)$, and the inequality*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} + \|u_t\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C_1(\|\varphi\|_{W_2^2(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^2(0,T)}),$$

holds with some constant C_1 , independent of φ and ψ .

Denote by $\Phi \subset W_2^2(0, T)$ a nonempty set of control functions φ such that $\varphi(0) = 0$ and by $\mathfrak{Z} \subset W_2^1(0, T)$ a nonempty set of objective functions z such that $z(0) = 0$. Consider the functional

$$\mathfrak{J}[z, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varphi] = \int_0^T ((u_\varphi(x_0, t) - z(t))^2 \mathbf{r}_1 + (u_{\varphi_t}(x_0, t) - z(t))^2 \mathbf{r}_2) dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in \mathfrak{Z},$$

where u_φ is the solution to problem (1) – (3) with the given control function φ and weight functions $\mathbf{r}_j \in L_\infty(0, T)$, $j = 1, 2$ such that

$\operatorname{ess\,inf}_{t \in (0, T)} \mathfrak{r}_j(t) = \tilde{\mathfrak{r}}_j > 0$, $j = 1, 2$. Considering the function z to be fixed, denote

$$\mathfrak{m}[z, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \Phi] := \inf_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{J}[z, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \varphi]. \quad (4)$$

Theorem 2. *If the set Φ is closed, convex and bounded in $W_2^2(0, T)$, then for any $z \in \mathfrak{Z}$ there exists a unique function $\varphi_0 \in \Phi$ such that*

$$\mathfrak{m}[z, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \Phi] = \mathfrak{J}[z, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \varphi_0].$$

We say that the problem (1) – (3), (4) is *densely controllable from the set Φ to the set $\mathfrak{Z}$* (see ([1] – [2])), if for all $z \in \mathfrak{Z}$ the equality $\mathfrak{m}[z, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \Phi] = 0$ holds.

Theorem 3. *Problem (1) – (3), (4) is densely controllable from the set $\Phi = \{\varphi \in W_2^2(0, T) : \varphi(0) = 0\}$ to the set $\mathfrak{Z} = \{z \in W_2^1(0, T) : z(0) = 0\}$.*

Qualitative properties of minimizer are also studied and its upper and lower estimates are obtained.

This research was supported by Russian Science Foundation under grant 25–11–00133.

References

- [1] Astashova I.V., Lashin D.A., Filinovskii A.V. *Control with point observation for a parabolic problem with convection*. Trans. Moscow Math. Soc., 219 (2019), 221-234.
- [2] Astashova I.V., Lashin D.A., Filinovskiy A.V. *On the extremum control problem with point observation for a parabolic equation*. Doklady Mathematics, 2022, 105 (2022), 158-161.
- [3] Ladyzhenskaya O.A. *Boundary value problems of mathematical physics*. Moscow: Fizmatlit, 1973.

HOMOGENIZATION OF TRAJECTORY ATTRACTORS OF RANDOM REACTION–DIFFUSION SYSTEMS IN DOMAINS WITH RAPIDLY OSCILLATING BOUNDARY

AZHMOLDAEV G.F.^{1,a}, BEKMAGANBETOV K.A.^{2,b},
CHECHKIN G.A.^{3,4,c}, CHEPYZHOV V.V.^{5,d}

¹L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan

²Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Kazakhstan

³Lomonosov Moscow State University, Russia;

⁴Institute of Mathematics with Computing Center, Subdivision of the Ufa Federal
Research Center of Russian Academy of Science, Russia

⁵Institute for Information Transmission Problems, RAS, Russia

^aazhmoldaevgf@gmail.com, ^bbekmaganbetov-ka@yandex.kz,

^cchchkin@mech.math.msu.su, ^dchep@iitp.ru

We study homogenization of random reaction-diffusion systems with rapidly oscillating terms in domains with rapidly oscillating boundary and containing a small parameter ε that characterizes the oscillation rate of coefficients in equations and in the boundary conditions. We consider reaction-diffusion systems that obeys some general dissipative conditions and we do not assume any Lipschitz condition. We study the asymptotic behavior of trajectory attractors of the considered systems as $\varepsilon \rightarrow 0+$. We combine homogenization methods (see, for example, [1]) and the theory of trajectory attractors (see [2]).

An important feature of the problem is the random geometry of the domains (see, for example, [3]), namely, on a part of its randomly oscillating boundary, we consider random Fourier conditions. It is assumed that the random structures of equations coefficients and the boundary profile functions are statistically homogeneous, which allows us to obtain a deterministic limit boundary-value problem using Birkhoff ergodic theorem (see [1]).

First, we construct trajectory attractors $\mathfrak{A}_\varepsilon$ for the considered random reaction-diffusion systems and the trajectory attractor $\overline{\mathfrak{A}}$ for the corresponding limit (homogenized) deterministic reaction-diffusion system including the limit boundary conditions.

After that, we prove that, with probability one, the random trajectory attractor $\mathfrak{A}_\varepsilon$ converges to the (non-random) trajectory attractor $\overline{\mathfrak{A}}$ as

$\varepsilon \rightarrow 0$ in the weak topology of some natural functional space that contains the trajectory spaces of the reaction-diffusion systems.

The homogenization of attractors for random reaction-diffusion equations with rapidly oscillating terms (and without boundary oscillation) was studied in [4].

The theory of trajectory attractors for dissipative partial differential equations was developed in [2]. This approach is essentially useful in the study of the long-time behavior of solutions to evolution equations for which the uniqueness result for the corresponding Cauchy problems has not been proved yet (for example, the 3D Navier-Stokes system) or fails (for example, the reaction-diffusion systems considered in this report).

The first and second authors are supported by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant AP26199535). The work of the third author is partially supported by the Russian Science Foundation (project 25-11-00133) and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement No 075-15-2022-284. The fourth author is partially supported by the Russian Science Foundation (project 23-71-30008).

References

- [1] Chechkin, G.A., Piatnitski, A.L., Shamaev, A.S. *Homogenization: Methods and Applications*. Am. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [2] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, Am. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [3] Chechkin, G. A., Friedman, A., Piatnitski, A.L. *The Boundary Value Problem in Domains with Very Rapidly Oscillating Boundary*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 231(1), (1999), 213–234.
- [4] Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. *Strong convergence of trajectory attractors for reaction-diffusion systems with random rapidly oscillating terms*. Commun. Pure Appl. Anal. 19 (2020), No. 5, 2419–2443.

ON THE OSCILLATIONS OF SOLUTIONS TO ONE DIFFERENTIAL EQUATION OF NEUTRAL TYPE

BASHUROV V.V.

Lomonosov Moscow State University, Russia
woonniethelih@yahoo.com

We consider a second-order differential equation of a neutral type with constant delays

$$(y - py_\tau)'' + q(t)f(y_\sigma) = 0, \quad y_\rho(t) \equiv y(t - \rho), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (1)$$

where $0 < p < 1$, $\tau, \sigma > 0$, $q \in C[t_0, +\infty)$, $q \geq 0$, $f \in C(\mathbb{R})$, $yf(y) > 0$ for $y \neq 0$, f' exists, is continuous and nonnegative on $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

Definition 1. A *solution* to equation (1) is the function $y \in C[t_0 - \rho, +\infty)$, where $\rho \equiv \max\{\tau, \sigma\}$, that satisfies it and such that $y - py_\tau \in C^2[t_0, +\infty)$.

Definition 2. A solution y to equation (1) is called *oscillatory* if for any $t_1 \geq t_0$ there exists $t_2 > t_1$ such that $y(t_2) = 0$.

Definition 3. We say that the function f satisfies:

– the *superlinear* condition, if for every $\varepsilon > 0$ the inequalities hold:

$$0 < \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dy}{f(y)} < +\infty, \quad 0 < - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} < +\infty; \quad (2)$$

– the *sublinear* condition, if for every $\varepsilon > 0$ the inequalities hold:

$$0 < \int_0^\varepsilon \frac{dy}{f(y)} < +\infty, \quad 0 < - \int_{-\varepsilon}^0 \frac{dy}{f(y)} < +\infty. \quad (3)$$

Theorem 1. Suppose the function f satisfies the superlinear condition (2). Then:

1) If $\int^{+\infty} tq(t) dt = +\infty$, then all not vanishing at infinity solutions to equation (1) are oscillatory;

2) If all solutions to equation (1) are oscillatory, then $\int^{+\infty} tq(t) dt = +\infty$.

Theorem 2. Suppose the function f satisfies the sublinear condition (3) and $f(uv) \geq f(u)f(v)$ for $uv \geq 0$. Then:

1) If $\int^{+\infty} f(t)q(t) dt = +\infty$, then all not vanishing at infinity solutions to equation (1) are oscillatory;

2) If all solutions to equation (1) are oscillatory,
then $\int^{+\infty} f(t)q(t) dt = +\infty$.

Theorem 3. Suppose the function f satisfies the sublinear condition (3), $\sigma > \tau$, and $\int^{+\infty} q(t) dt = +\infty$, then all solutions to equation (1) are oscillatory.

Theorem 4.

Suppose there exists a function $r \in C^2[t_0, +\infty)$, $r > 0$ such that

$$\int^{+\infty} r(t)q(t) dt = +\infty.$$

Then each of the following sets of conditions (5) – (7) guarantees the oscillation of all not vanishing at infinity solutions to equation (1):

$$r' \geq 0, \quad r'' \leq 0, \quad (2); \tag{5}$$

$$r' \leq 0, \quad r'' \geq 0; \tag{6}$$

$$\int^{+\infty} |r''(t)| dt < +\infty, \quad (2), \quad (3). \tag{7}$$

References

- [1] Atkinson, F.V. On Second-Order Non-Linear Oscillation. Pacific Journal of Mathematics, 1995, 5, 643-647.
- [2] S. Belohorec. Oscillatory solutions of certain nonlinear differential equations of second order. Mat. Fyz. Casopis Sloven Akad. Vied., 1961, 250-255.
- [3] J.K. Hale. Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [4] J.S.W. Wong. Necessary and sufficient conditions for oscillation of second-order neutral differential equations. J. Math. Anal. Appl., 1999, 342-352.
- [5] I.V. Kamenev. On the oscillation of solutions of a nonlinear second-order equation with sign-changing coefficient. Differ. Uravn., 1970, 6:9, 1718-1721.

UNIFORM SPECTRAL ASYMPTOTICS FOR SCHRÖDINGER OPERATOR WITH TRANSLATION IN FREE TERM AND PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

BORISOV D.I.^{1,a}, POLYAKOV D.M.^{2,b}

¹Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, RAS, Russia

²Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of RAS, Russia

^aborisovdi@yandex.ru, ^bdmitrypolyakow@mail.ru

In this paper we study the nonlocal Schrödinger operator $\mathcal{H}(a)$ in $L_2(0, 2\pi)$ with the differential expression

$$(\hat{\mathcal{H}}(a)u)(x) := -\frac{d^2u}{dx^2}(x) + V(x)u(x-a), \quad a \in [0, 2\pi], \quad (1)$$

subject to the periodic boundary conditions

$$u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi). \quad (2)$$

Here $u(x-a)$ is understood in the sense of 2π -periodic continuation of the function u to the entire real line, while $V = V(x)$, $x \in \mathbb{R}$, is 2π -periodic complex-valued function such that

$$V \in W_2^3(0, 2\pi), \quad V^{(j)}(0) = V^{(j)}(2\pi), \quad j = 0, 1, 2. \quad (3)$$

We suppose that the function V is not identically zero. By $\|\cdot\|_{X \rightarrow Y}$ we denote a norm of bounded operators acting from a Banach space X into a Banach space Y . Our first result is as follows.

Theorem 1. *The operator $\mathcal{H}(a)$ is m -sectorial for each $a \in [0, 2\pi]$. There exists a fixed $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ independent of a such that the half-plane $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_0\}$ is in the resolvent set of all operators $\mathcal{H}(a)$, $a \in [0, 2\pi]$. For each λ in this half-plane the resolvent $(\mathcal{H}(a) - \lambda)^{-1}$ depends continuously on $a \in [0, 2\pi]$ and for all $a, b \in [0, 2\pi]$, $a \leq b$, the estimate*

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{H}(a) - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}(b) - \lambda)^{-1}\|_{L_2(0, 2\pi) \rightarrow W_2^2(0, 2\pi)} \leq C(d(a, b))^{\frac{1}{2}}, \\ & d(a, b) := \min \{b - a, 2\pi - b + a\}, \end{aligned} \quad (4)$$

holds with some constant C independent of a and b . For each $a \in [0, 2\pi]$ the spectrum of the operator $\mathcal{H}(a)$ consists of countably many discrete eigenvalues, which accumulate at infinity only.

We arrange the eigenvalues of the operator $\mathcal{H}(a)$ taken in the ascending order of their absolute values counting their algebraic multiplicities.

Theorem 2. *The eigenvalues of the operator $\mathcal{H}(a)$ are continuous in $a \in [0, 2\pi]$ functions such that for each eigenvalue we have $\lambda(0) = \lambda(2\pi)$. All eigenvalues are located in the semi-strip*

$$\Pi := \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq -\alpha_0, |\operatorname{Im} \lambda| \leq \alpha_0\}, \quad \alpha_0 := \max_{[0, 2\pi]} |V|. \quad (5)$$

There exist fixed $R_0 > 0$ and $n_0 > 0$ independent of $a \in [0, 2\pi]$ such that the total algebraic multiplicity of the eigenvalues obeying $\operatorname{Re} \lambda \leq R_0$ is bounded uniformly in $a \in [0, 2\pi]$, while in the set $\Pi \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > R_0\}$ all eigenvalues of the operator $\mathcal{H}(a)$, denoted by $\lambda_n^\pm(a)$, $n \geq n_0$, have the following properties. The total algebraic multiplicity of the eigenvalues $\lambda_n^+(a)$ and $\lambda_n^-(a)$ is exactly two and they can be represented as

$$\begin{aligned} \lambda_n^\pm(a) &= n^2 + \Lambda_{n,0}^\pm(a) + \frac{\Lambda_{n,1}^\pm(a)}{n} + \frac{\Lambda_{n,2}^\pm(a)}{n^2} + \frac{\eta_n^\pm(a)}{n^3}, \\ \Lambda_{n,0}^\pm(a) &:= V_0 e^{\mp i n a}, \quad \Lambda_{n,1}^\pm(a) := \mp \frac{e^{\mp 2 i n a}}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{V_p V_{-p}}{p} e^{-i p a}, \\ \Lambda_{n,1}^\pm(a) &:= \frac{1}{4} \left(e^{\mp 3 i n a} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{-p\}} \frac{V_p V_q V_{-p-q}}{p(p+q)} e^{-i(q+2p)a} \right. \\ &\quad \left. + V_0 e^{\mp 3 i n a} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{V_p V_{-p}}{p^2} e^{-i p a} - e^{\mp 2 i n a} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} V_p V_{-p} e^{-i p a} \right), \end{aligned}$$

where $\eta_n^\pm(a)$ and $\Lambda_{n,j}^\pm(a)$ are bounded uniformly in n and a .

The research by D.I. Borisov is supported by the the Ministry of Education of the Russian Federation (agreement no. 073-03-2025-039 of 16.01.2025).

A COUPLED PROBLEM DESCRIBED BY TIME DEPENDENT SUBDIFFERENTIAL OPERATOR AND FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

BOUABSA A.

Jijel University, Jijel, Algeria
ayabouabsa670@gmail.com

In this work, we are interested in a new system governed by integro differential inclusion and Riemann Liouville fractional derivative as follows

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dot{x}(t) \in \partial\psi(t, x(t)) + g_1(t, u(t), x(t)) \\ \quad + \int_0^t g_2(t, s, u(s), x(s))ds, \quad t \in I, \\ D^\alpha u(t) = x(t) \text{ a.e. } t \in I, \\ u(0) = 0, \quad D^\alpha u(0) = b, \\ D^{\alpha-1}u(t) = \int_0^t x(s)ds + b, \\ x(0) = x_0 \in \text{dom } \psi(0, \cdot), \end{array} \right.$$

where $\alpha \in]1, 2]$, D^α denotes Riemann Liouville fractional derivative, $\partial\psi(t, \cdot)$ (resp. $\text{dom } \psi(0, \cdot)$) the subdifferential of a proper, lower semi continuous, convex real valued map $\psi(t, \cdot)$ (resp. the effective domain of $\psi(0, \cdot)$) from a real Hilbert space H to $[0, +\infty]$. The real valued map $\psi(t, \cdot)$ satisfies an assumption expressed in term of its conjugate function (see (H_ψ^2) below).

The maps $g_1 : I \times H \times H \rightarrow H$ and $g_2 : I \times I \times H \times H \rightarrow H$ are single valued maps satisfying suitable assumptions. The current work is concerned with a new system involving an integro differential inclusion of subdifferential type and fractional derivative, in Hilbert spaces. we proceed by a fixed point theorem to handle the considered system.

References

- [1] Bouabsa A., Saidi S., Coupled systems of subdifferential type with integral perturbation and fractional differential equations, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. 7 (1) (2023), 253–271.

- [2] Bouabsa A., Saidi S., On a system involving an integro differential inclusion with subdifferential and caputo fractional derivative, *Matematiche (Catania)*, 78 (2) (2023), 289–315.

NONLINEAR WAVE IN DISTRIBUTED BIOLOGICAL SYSTEM

BRATUS A.

Moscow Center of Pure and Applied Mathematics, Russia
Russian University of Transport, Russia
alexander.bratus@yandex.ru

A hypercycle equation [1] with infinitely many types of macromolecules is formulated and studied both analytically and numerically. The resulting model is given by an integro-differential equation of the mixed type. Sufficient conditions for the existence, uniqueness, and non-negativity of solutions are formulated and proved. Analytical evidence is provided for the existence of non-uniform (with respect to the second variable) steady states. Finally, numerical simulations strongly indicate the existence of a stable nonlinear wave.

References

- [1] Bratus A.S., Drozhzhin S.V., Yakushkina T.S. *Mathematical Models Evolution and Dynamics Replicator System*. Moscow, URSS, 261 p. (In Russian), 2022.

ON THE SOLVABILITY AND POSITIVE SOLVABILITY OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LINEAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

BRAVYI E.

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia
bravyi@perm.ru

For the functional differential equation

$$u''(x) = (Tu)(x) + f(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

where $T : \mathbf{C}[0, 1] \rightarrow \mathbf{L}[0, 1]$ is a linear bounded operator and $f \in \mathbf{L}[0, 1]$, we consider the boundary value problem

$$u'(0) = 0, \quad (2)$$

$$u(0) = \alpha u'(1). \quad (3)$$

This problem is satisfied by the steady-state of a heated rod in a heat conduction model described by equation (1). The nonlocal boundary condition (3) means that the heat flux at the right end of the rod is determined by a special controller (thermostat) and is proportional to the temperature measured by a sensor at the left end of the rod. The non-stationary formulation of the linear heat conduction problem with the nonlocal boundary condition (3) was apparently first studied in the works of [1, 2]. In recent years, numerous works have appeared devoted to the problem (1)–(3) in the case where the operator T is a Nemytskii operator (for example, [3]). Generalizations of these models are also considered, in particular, models with fractional derivatives [4] and with a functional operator T [5].

Here, problem (1)–(3) is considered for families of monotone operators T with given norms. We consider linear operators T such that either T or $-T$ is positive (maps non-negative functions to non-negative functions). The norm of such an operator T is defined by the equality $\|T\|_{\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{L}} = \int_0^1 |(T\mathbf{1})(s)| ds$. We formulate a result on the unique solvability and another on the sign preservation of solutions.

Theorem 1. *The boundary value problem (1)–(3) has a unique solution for all positive operators T with a given norm $\mathcal{T}^+$ if and only if either the inequalities*

$$0 \leq \mathcal{T}^+ \leq \begin{cases} 4 + 1/\alpha & \text{if } \alpha \leq -1/2, \\ 1/(1 + \alpha) & \text{if } \alpha > -1/2, \end{cases} \quad (4)$$

hold, or the inequalities

$$\alpha \geq \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{\alpha} \leq \mathcal{T}^+ \leq \begin{cases} 4 + 8(\sqrt{\alpha(1 + \alpha)} + \alpha) & \text{if } \alpha \in [1/8, \alpha_1], \\ 4 + 1/\alpha & \text{if } \alpha > \alpha_1, \end{cases} \quad (5)$$

hold, where $\alpha_1 = q/24 + 6/q - 1/12 \approx 0.19$, $q = (100 + 12\sqrt{69})^{1/3}$.

Theorem 2. *Let $\alpha > 1/2$ and the conditions of Theorem 1 be satisfied. Then all solutions of problem (1)–(3) preserve their sign for all non-negative functions $f \in \mathbf{L}[0, 1]$ satisfying the condition*

$$\mu \text{ vrai sup}_{x \in [0, 1]} f(x) \leq \text{vrai inf}_{x \in [0, 1]} f(x), \quad \mu \in [0, 1],$$

if and only if

$$\mathcal{T}^+ \leq 1 + \sqrt{\mu}. \quad (6)$$

If conditions (4) are satisfied, then the solutions are non-negative; if conditions (5) are satisfied, then the solutions are non-positive.

If conditions (4)–(6) are not satisfied, there exists an operator T with the given norm for which the investigated property does not hold.

This work was performed as part of the State Task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FSNM-2023-0005).

References

- [1] Guidotti P., Merino S. *Hopf bifurcation in a scalar reaction diffusion equation.* J. Differ. Equations, 140 (1997), 209–222.
- [2] Guidotti P., Merino S. *Gradual loss of positivity and hidden invariant cones in a scalar heat equation.* Differ. Integral Equ., 13 (2000), 1551–1568.
- [3] Webb J. R. L. *Existence of positive solutions for a thermostat model.* Nonlinear Anal. Real World Appl, 13 (2012), 923–938.
- [4] Nieto J. J., Pimentel J. *Positive solutions of a fractional thermostat model.* Bound. Value Probl., 2013:5 (2013).
- [5] Calamai A., Infante G. *Nontrivial Solutions of a Parameter-Dependent Heat-Flow Problem with Deviated Arguments.* Topological Methods for Delay and Ordinary Differential Equations, Springer, 2024, 141–150.

ON THE (NON)-EXISTENCE THEOREM FOR THE CRITICAL QUASILINEAR PROBLEMS ON COMPACT MANIFOLDS

BYSTROV D. V.

St Petersburg State University, Russia
danil.bystrovv@gmail.com

We consider the following boundary value problem

$$-\Delta_p u + u^{p-1} = u^{p^*-1} \text{ and } u > 0 \text{ in } \Omega, \quad (1)$$

where Ω is a compact smooth Riemannian n -dimensional manifold without boundary, $p \in (1, n)$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du)$ is the p -Laplacian operator and $p^* = \frac{np}{n-p}$ stands for the critical Sobolev exponent.

In [1] the following theorem was proved

Теорема 1. *Let $n \geq 5$ and let Ω have a point with positive scalar curvature. Then there exists $\beta > 0$ such that for $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ the problem (1) has a minimal energy solution.*

It is also known that if Ω is small enough, then the minimal energy solution of (1) exists for any $p \in (1, n)$.

We prove that the result in Theorem 1 is sharp. More specifically, for a sphere big enough and for $p > \frac{n+2}{3}$ there is no minimal energy solution for (1).

The talk is based on a joint work with A. I. Nazarov.

The work was supported by the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation «BASIS».

Список литературы

- [1] Демьянов А.В., Назаров А.И. *О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем.* Алгебра и Анализ **17** (2005), no. 5, 105-140.

CARICATURE OF HYDRODYNAMICS FOR THE HAMILTONIAN "FIELD-CRYSTAL" SYSTEM

DUDNIKOVA T.V.

M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS
tdudnikov@mail.ru

One of the central problem of nonequilibrium statistical physics is the mathematically rigorous derivation of macroscopic evolution equations from the microscopic dynamics of a particle system. In the talk, we discuss this problem for the Hamiltonian system consisting of a real scalar Klein–Gordon field $\psi(x)$ and its momentum $\pi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, coupled to a harmonic crystal described by the deviations $u(k) \in \mathbb{R}^n$ of particles (atoms, molecules, ions, etc) from their equilibrium position and their

velocities $v(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $d, n \geq 1$. The Hamiltonian functional of the coupled system reads

$$\begin{aligned} H(\psi, u, \pi, v) := & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla \psi(x)|^2 + m_0^2 |\psi(x)|^2 + |\pi(x)|^2 \right) dx \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} u(k) \cdot V(k - k') u(k') + |v(k)|^2 \right) \\ & + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} R(x - k) \cdot u(k) \psi(x) dx, \end{aligned}$$

where the coupled function $R(x)$ is a $\mathbb{R}^n$ -valued smooth function exponentially decaying at infinity, $m_0 > 0$, V is a real interaction matrix in the crystal, $V(k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. To derive the transport equation we introduce a small (scale) parameter ε and consider a family of the initial measures $\{\mu_0^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ satisfying some conditions. In particular, we assume that the measures μ_0^ε are locally spatially homogeneous (w.r.t. the translations in $\mathbb{Z}^d$) or “slowly vary” under order shifts less than ε^{-1} , and inhomogeneous under shifts of the order ε^{-1} . Given nonzero $\tau \in \mathbb{R}$ and $z \in \mathbb{R}^d$, we study the distribution $\mu_{\tau/\varepsilon^\kappa, z/\varepsilon}^\varepsilon$ of the random solution close to the spatial point $[z/\varepsilon]$ and at time moments τ/ε^κ with an κ , $\kappa > 0$. In the case $\kappa < 1$, we prove that the measures $\mu_{\tau/\varepsilon^\kappa, z/\varepsilon}^\varepsilon$ weakly converge to a limit measure as $\varepsilon \rightarrow 0$, which is Gaussian and its covariance matrix does not depend on τ . For $\kappa = 1$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{\tau/\varepsilon, z/\varepsilon}^\varepsilon = \mu_{\tau, z}$, where $\mu_{\tau, z}$ is a Gaussian measure. In particular, we derive the explicit formulas for the covariance matrix of the limit measure $\mu_{\tau, z}$. These formulas allow us to conclude that in the Bloch–Floquet–Zak transform the limit covariance matrix evolves according to the following equation:

$$\partial_\tau f_{\tau, z}(\theta) = i C(\theta) \nabla \Omega(\theta) \cdot \nabla_z f_{\tau, z}(\theta), \quad C(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1}(\theta) \\ -\Omega(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where $z \in \mathbb{R}^d$, $\tau > 0$, $\theta \in [-\pi, \pi]^d$, and, roughly, $\Omega(\theta)$ is the “dispersion relation” of our model. Eq. (1) can be considered as the analog of the Euler equation, see [1] for details. Furthermore, we derive the equation for the “next approximations” to the limiting Euler equation (1) (i.e., we obtain in (1) the additional terms of the order ε^κ , $\kappa = 1, 2, \dots$). For this, we study the asymptotic behavior as $\varepsilon \rightarrow 0$ of correlation functions of

distributions of the solutions at times τ/ε^κ , $\kappa = 2, 3, \dots$, and at space points close to $[z/\varepsilon]$. After an appropriate change of variables in the limit expressions ($\tau \rightarrow t$: $\tau = \varepsilon^{\kappa-1}t$), we obtain the equation of a form

$$\begin{aligned} \partial_t f = i C(\theta) & \left(\nabla \Omega(\theta) \cdot \nabla_z f + \frac{i\varepsilon}{2} \nabla^2 \Omega(\theta) \cdot \nabla_z^2 f + \dots \right. \\ & \left. + \frac{(i\varepsilon)^{\kappa-1}}{\kappa!} \nabla^\kappa \Omega(\theta) \cdot \nabla_z^\kappa f \right). \end{aligned} \quad (2)$$

In particular, if $\kappa = 2$, then Eq. (2) can be considered as an equation of the Navier–Stokes type. For the harmonic crystals, Eqs (1) and (2) were derived in [2, 3] for the one-dimensional case and in [4] for the multidimensional case.

References

- [1] Dudnikova T.V. *Caricature of hydrodynamics for the harmonic crystal coupled to a Klein–Gordon field*. Russ. J. Math. Phys. 31 (2024), 606–621.
- [2] Dobrushin R.L., Pellegrinotti A., Suhov Yu.M., Triolo L. *One dimensional harmonic lattice caricature of hydrodynamics*. J. Stat. Phys. 43 (1986), 571–607.
- [3] Dobrushin R.L., Pellegrinotti A., Suhov Yu.M., Triolo L. *One dimensional harmonic lattice caricature of hydrodynamics: Second approximation*. J. Stat. Phys. 52 (1988), 423–439.
- [4] Dudnikova T.V., Spohn H. *Local stationarity for lattice dynamics in the harmonic approximation*. Markov Processes and Rel. Fields, 12 (2006), 645–678.

CHAIN-RECURRENT C^0 - Ω -BLOW UP IN SMOOTH SKEW PRODUCTS ON MULTIDIMENSIONAL CELLS

EFREMOVA L.S.

Nizhny Novgorod State University, Russia
Moscow Institute of Physics and Technology, Russia
lefunn@gmail.com

This is the joint work with Dmitry Novozhilov.

We consider here a C^1 -smooth skew product of interval maps

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

where $F : I^n \rightarrow I^n$ ($n \geq 2$), $I^n = \prod_{j=1}^n I_j$, all I_j are closed intervals.

We present here different criteria of C^0 - Ω -blow up ((i) in the terms of properties of the set of chain recurrent points; (ii) in the terms of properties of connected components of the set of periodic points; (iii) in terms of properties of the set of weakly nonwandering points) in C^1 -smooth skew products with a bounded set of (least) periods of periodic points. We also give examples of skew products under consideration that admit the Ω -blow up. The obtained results allow us to explain the mechanism of the observed C^0 - Ω -blow up [1].

All of the above, together with considerations of the topological entropy, shows that we have obtained a new, previously unknown scenario for the transition to chaos in C^1 -smooth skew products on multidimensional cells.

This research is supported by Russian Science Foundation (RSF) under grant 24-21-00242, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00242/>.

References

- [1] Efremova L., Novozhilov D., *Chain-recurrent C^0 - Ω -blow up in C^1 -smooth simplest skew products on multidimensional cells*. Regular and Chaotic Dynamics, 30(1) (2025), 120-140.

ON INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE THREE-DIMENSIONAL ZAKHAROV–KUZNETSOV EQUATION

FAMINSKII A.V.

RUDN University, Russia

Initial-boundary value problems for the three-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation

$$u_t + bu_x + \Delta u_x + uu_x = 0 \quad (1)$$

($u = u(t, x, y, z)$, b is a real constant, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ is the Laplace operator) are considered in a domain $\Pi_T^+ = (0, T) \times \Sigma_+$, where $T > 0$ is arbitrary, $\Sigma_+ = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ and a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is bounded, with an initial condition

$$u|_{t=0} = u_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma_+, \quad (2)$$

a boundary condition on the left boundary

$$u|_{x=0} = 0, \quad (t, y, z) \in B_T = (0, T) \times \Omega, \quad (3)$$

and one of two boundary conditions on $\Gamma_T^\perp = (0, T) \times \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \text{either a) the Dirichlet condition} \quad u|_{\Gamma_T^\perp} &= 0, \\ \text{or b) the Neumann condition} \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}|_{\Gamma_T^\perp} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

The boundary of the domain Ω is subjected to the following condition: either 1) $\partial\Omega \in C^{10}$, or 2) Ω is a rectangle $(0, L_1) \times (0, L_2)$ for certain $L_1, L_2 > 0$.

Let $\Delta^\perp = \partial_y^2 + \partial_z^2$. Introduce the spaces $\tilde{H}^k(\Sigma_+)$, consisting of functions $\varphi(x, y, z) \in H^k(\Sigma_+)$ satisfying

$$\text{in the case a) } (\Delta^\perp)^m \varphi|_{\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega} = 0 \text{ for } m \in [0, k/2),$$

$$\text{in the case b) } \frac{\partial}{\partial \bar{n}} (\Delta^\perp)^m \varphi|_{\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega} = 0 \text{ for } m \in [0, (k-1)/2).$$

An infinitely smooth positive on $\overline{\mathbb{R}_+}$ function $\psi(x)$ is called an admissible weight function and denoted $\psi \in \mathcal{A}$, if $|\psi^{(j)}(x)| \leq c(j)\psi(x) \forall j$ and $\forall x \geq 0$. Obviously, the functions $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$, $\psi(x) \equiv (1+x)^{2\alpha} \in \mathcal{A}$ for $\alpha \in \mathbb{R}$, moreover, if $\alpha > 0$ then $\psi' \in \mathcal{A}$.

For a function $\psi \in \mathcal{A}$ the symbol $\tilde{H}^{k,\psi}(\Sigma_+)$ denotes the space of functions $\varphi(x, y, z)$ satisfying $\varphi\psi^{1/2} \in \tilde{H}^k(\Sigma_+)$.

Theorem 1. *Let $u_0 \in \tilde{H}^{3,\psi}(\Sigma_+)$ for a function $\psi(x)$ satisfying $\psi, \psi' \in \mathcal{A}$ and for certain constant $c_0 > 0$*

$$\psi'(x) \geq c_0 \psi^{1/3}(x) \quad \forall x \geq 0, \quad (5)$$

$u_0(0, y, z) \equiv 0$. Then problem (1)–(4) both in the case a) and in the case b) is well-posed in the space

$$X^{3,\psi}(\Pi_T^+) = C([0, T]; \tilde{H}^{3,\psi}(\Sigma_+)) \cap L_2(0, T; \tilde{H}^{4,\psi'}(\Sigma_+)).$$

Condition (5) is verified by the exponential weight $e^{2\alpha x}$ for any $\alpha > 0$ and the power weight $(1+x)^{2\alpha}$ for $\alpha \geq 3/4$.

Let $\lambda_1 > 0$ be the smallest eigenvalue of the operator $-\Delta^\perp$ in the domain Ω with the homogeneous Dirichlet boundary condition.

Theorem 2. *There exists $\Lambda(b)$, satisfying $\Lambda(b) = 0$ for $b \leq 0$, $\Lambda(b) > 0$ for $b > 0$, for which if $\lambda_1 \geq \Lambda(b)$, then there exist $\alpha_0 > 0$, $\epsilon_0 > 0$ and $\beta > 0$, such that if $u_0 \in \widetilde{H}^{3,\psi}(\Sigma_+)$ for $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ and $\alpha \in (0, \alpha_0]$, $\|u_0\|_{L_2(\Sigma_+)} \leq \epsilon_0$, $u_0(0, y, z) \equiv 0$, then for certain constant c , depending on $b, \alpha, \beta, \|u_0\|_{H^{3,\psi}(\Sigma_+)}$, the corresponding unique solution of problem (1)–(4) in the case a) from the space $X^{3,\psi}(\Pi_T^+)$ $\forall T > 0$ satisfies an inequality*

$$e^{2\alpha\beta t} \|u(t, \cdot, \cdot, \cdot)\|_{H^{3,\psi}(\Sigma_+)}^2 + \int_0^t e^{2\alpha\beta\tau} \|u(\tau, \cdot, \cdot, \cdot)\|_{H^{4,\psi}(\Sigma_+)}^2 d\tau \leq c \quad \forall t \geq 0.$$

Results on global existence, uniqueness and large-time decay of less regular solutions were previously established in [1].

This research was supported by RSF grant 23-11-00056.

References

- [1] Faminskii A.V. *Initial-boundary value problems for the three-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation*. Zapiski nauchn. sem. POMI, 536 (2024), 336–378 (in Russian).

ON FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE

FINOGENKO I.A.

Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Russia
fin2709@mail.ru

This study aim to transfer the main results and methods of the general theory of ordinary differential equations with discontinuous right-hand side from [1], [2] to functional differential equations exhibiting similar discontinuous.

The functional nature of systems with delay is well known, starting with the famous studies by N.N. Krasovskiy, which are associated with the direct Lyapunov method. In contrast to systems without delay, problems emerge here (at least formally) when the derivatives of Lyapunov-Krasovskiy functionals are calculated along the solutions, as this requires knowledge of the solutions themselves. The same problem arises when describing sliding modes of functional differential equations with discontinuous right-hand sides.

We will consider the functional differential equation (FDE)

$$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot)), x_{t_0}(\cdot) = \phi_0(\cdot), \quad (1)$$

where $f : R^1 \times C_\tau \rightarrow R^n$ is a discontinuous function, R^n is a n -dimensional vector space with norm $\|\cdot\|$, C_τ is the space of all continuous functions $\phi(\cdot)$ defined on the interval $[-\tau, 0]$ with values in R^n with the usual sup-norm $\|\phi(\cdot)\|_C = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|\phi(\theta)\|$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\tau \geq 0$.

In systems without delay, the set of discontinuity points on the right-hand side in the general case constitutes a set with zero Lebesgue measure [1].

Let the function f be discontinuous on the set of points $M \subset R^1 \times C_\tau$. Motions of system (1) over set M , by analogy with discontinuous systems without delay, also be called sliding modes. It is important to note, however, that for the sets M in a function space, this term is not justified.

The following questions arise.

1. What properties in the general case should the set of M discontinuity points of the right-hand side of equations (1) have to enable the simplest convex definition and other approaches related to the use of limit values of the right-hand sides of equations and the theory of functional differential inclusions?

2. For what sets M and of what kind will the meaningful conditions for the existence of sliding modes for equation (1) with piecewise continuous right-hand side be?

3. What analogue of the equivalent control method for the system

$$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot), u_1, \dots, u_k) \quad (2)$$

could be and how to derive equations to determine the equivalent controls for equation (2) with functional phase space C_τ ?

This study is concerned with a comprehensive study of these issues.

Definition 1. A set $\subset X$ in a metric space X is termed a boundary set, if its complement $X \setminus A$ is dense throughout the space.

As seen from Definition 1, the boundary property is the general property of the set M , without which it becomes impossible to consider analogues of methods from the theory of discontinuous systems for functional differential equations.

To constructively describe sets of discontinuity points M , we use a special class of invariantly differentiable functionals, which was introduced in [3] for solving the stability theory problems within the framework of the direct Lyapunov-Krasovsky method.

The work was carried out within the framework of the state task of the Ministry of Education and Science of Russia, project 1210401300060-4.

References

- [1] Filippov A.F. Differential equations with discontinuous right-hand side. M.: Nauka, 1985. 224 p.
- [2] Aizerman M.A., Pyatnitsky E.S. Basics of discontinuous theory systems 1.2 // Avtomatika and Telemekhanika. 1974. N 7. P. 33–47, 1974. N 8. P. 39–61.
- [3] Kim A.V. i-Smooth Analysis. A Wiley – Interscience Publication. Chichester – New York – Brisbane, 2014. 279 p.

STABILITY ANALYSIS OF A NONLINEAR EPIDEMIOLOGICAL MODEL WITH INCUBATION AND TEMPORARY IMMUNITY

GABIDULLIN D.A

Lomonosov Moscow State University, Russia
david0166@yandex.ru

A dynamical system is considered:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (1-p)a - dS - \frac{\beta IS}{1+\sigma I^k} + \delta V, \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{1+\sigma I^k} - (d+\varepsilon+\eta)E, \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (d+\tau)I, \\ \frac{dV}{dt} = pa + \tau I + \eta E - (d+\delta)V, \end{cases} \quad (1)$$

which arises in an epidemiological mathematical model that accounts for the incubation period and temporary immunity. In this model, the entire population N is divided into 4 categories: susceptible S , exposed E , infected I , and vaccinated/recovered V . All parameters of system (1) are nonnegative and have biological meaning.

$SEIVS$, $SIRS$ models with various incidence rates have been studied in [1–8]: in [1–4], geometric approaches were applied to $SEIVS$ models to establish the asymptotic and global asymptotic stability of equilibrium points depending on the control reproduction number R_c ; in [5], a

geometric criterion of global asymptoticity was generalized; in [6], the diffusion effects of epidemic spread in populations were considered for *SIRS* models.

A new infectious force is considered below:

$$\varphi(I) := \frac{\beta I}{1 + \sigma I^k},$$

where the parameters σ and k estimate the inhibitory or psychological effects induced by the information campaigns carried out in the population.

System (1) always has the equilibrium

$$Q_0 = (S_0, 0, 0, V_0), \quad S_0 \equiv \frac{a((1-p)d + \delta)}{d(d + \delta)}, \quad V_0 \equiv \frac{pa}{d + \delta},$$

which corresponds to the absence of infected individuals in the population.

System (1) admits a biologically feasible region

$$\mathcal{D} = \{(S, E, I, V) \in \mathbb{R}_+^4 : S \leq S_0, V \leq V_0, \\ E \leq S_0 + V_0, I \leq S_0 + V_0, S + E + I + V \leq a/d\},$$

which is positively invariant. We introduce the control reproduction number, depending on the model parameters:

$$R_c := \frac{\varepsilon S_0 \varphi'(0)}{(d + \tau)(d + \varepsilon + \eta)}.$$

Definition. An equilibrium point x^* is called:

- *asymptotically stable* if all solutions starting sufficiently close to it remain close and tend to x^* as time goes to infinity;
- *globally asymptotically stable* if every solution, regardless of the initial condition, tends to x^* as time goes to infinity.

Theorem 1. *The equilibrium Q_0 of system (1) is globally asymptotically stable if $R_c \leq 1$ and unstable if $R_c > 1$.*

Theorem 2. *If $R_c > 1$, then system (1) has, within region $\mathcal{D}$, another equilibrium point $Q^* \neq Q_0$, which is asymptotically stable.*

References

- [1] Cai, L.M., Li, X.Z. (2009). Analysis of a SEIV epidemic model with a nonlinear incidence rate. *Appl. Math. Model.*, **33**(7), 2919–2926.

- [2] Sahu, G.P., Dhar, J. (2012). Analysis of an SEIVS epidemic model with partial temporary immunity and saturation incidence rate. *Appl. Math. Model.*, **36**(3), 908–923.
- [3] Li, M.Y., Muldowney, J.S. (1996). A geometric approach to the global-stability problems. *SIAM J. Math. Anal.*, **27**(4), 1070–1083.
- [4] Liu, J.L., Zhang, T.L. (2011). Global stability for a tuberculosis model. *Math. Comput. Model.*, **54**, 836–845.
- [5] Lu, G.C., Lu, Z.Y. (2017). Geometric approach to global asymptotic stability for the SEIRS models in epidemiology. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **36**, 20–43.
- [6] Astashova, I., Chebotaeva, V., Cherepanov, A. (2018). Mathematical models of epidemics in closed populations and their visualization via web application phapl. *WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine*, **15**(12), 112–118. ISSN / E-ISSN: 1109-9518 / 2224-2902.

GLOBAL EXISTENCE AND BLOW-UP OF SOLUTIONS A PARABOLIC EQUATION WITH NONLINEAR MEMORY UNDER NONLINEAR NONLOCAL BOUNDARY CONDITION

GLADKOV A.

Belarusian State University, Belarus
gladkoval@mail.ru

We consider nonlinear nonlocal parabolic equation

$$u_t = \Delta u + a \int_0^t u^q(x, \tau) d\tau - bu^m, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

with nonlinear nonlocal boundary condition

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

and initial datum

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

where a, b, q, m, l are positive numbers, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ for $N \geq 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$, ν is unit outward normal on $\partial\Omega$.

Throughout this paper we suppose that the functions $k(x, y, t)$ and $u_0(x)$ satisfy the following conditions:

$$k(x, y, t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0, +\infty)), \quad k(x, y, t) \geq 0;$$

$$u_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u_0(x) \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0^l(y) dy \text{ on } \partial\Omega.$$

The initial boundary value problem (1)–(3) with $a = 0$ has been considered in [1], [2].

Let $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T) \cup \overline{\Omega} \times \{0\}$, $T > 0$. We prove the comparison principle and the positiveness of classical solutions.

Theorem 1. *Let $\bar{u}$ and $\underline{u}$ be a supersolution and a subsolution of problem (1)–(3) in Q_T , respectively. Suppose that $\underline{u}(x, t) > 0$ or $\bar{u}(x, t) > 0$ in $Q_T \cup \Gamma_T$ if $\min(q, l) < 1$. Then $\bar{u}(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$ in $Q_T \cup \Gamma_T$.*

Theorem 2. *Let u be a solution of problem (1)–(3) in Q_T . Let $u_0(x) \not\equiv 0$ in Ω and $m \geq 1$. Then $u(x, t) > 0$ in $Q_T \cup S_T$. If $u_0(x) > 0$ in $\overline{\Omega}$ and $m < 1$ then $u(x, t) > 0$ in $Q_T \cup \Gamma_T$.*

We prove global existence and finite time blow-up results.

Theorem 3. *Let at least one from the following conditions hold:*

- a). $\max(q, l) \leq 1$;
- b). $l \leq 1, 1 < q \leq m$;
- c). $1 < l < m, q \leq m$.

Then every solution of (1)–(3) is global.

To formulate finite time blow-up result we suppose that for some $k_1 > 0, t_1 > 0$

$$\int_{\partial\Omega} k(x, y, t) dS_x \geq k_1 \text{ for any } y \in \Omega \text{ and } t \geq t_1. \quad (4)$$

Theorem 4. *Let $q > \max(m, 1)$ or $l > \max(m, 1)$ and (4) hold. Then solutions of (1)–(3) blow up in finite time for any $u_0(x) \not\equiv 0$.*

The results of the talk have been published in [3], [4].

This research was supported by the state program of fundamental research of Belarus under grant 1.2.02.2.

References

- [1] Gladkov A. *Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal Neumann boundary condition*. Commun. Pure Appl. Anal., 16 (2017), 2053-2068.

- [2] Gladkov A. *Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with absorption and nonlinear nonlocal boundary condition*. Lith. Math. J., 57 (2017), 468-478.
- [3] Gladkov A. *Initial boundary value problem with nonlocal boundary condition for a nonlinear parabolic equation with memory*. Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics, Issue 2 (2023), 17-24.
- [4] Gladkov A. *Global existence and blow-up of solutions a parabolic equation with nonlinear memory and absorption under nonlinear nonlocal boundary condition*. Lobachevskii J. Math., 45 (2024), 1703-1712.

NONLOCAL STABLE OSCILLATIONS IN PL DYNAMICAL SYSTEMS

GOLUBYATNIKOV V.P.^{1,a}, GLUBOKIKH A.V.^{2,b}

¹Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University, Russia

^aVladimir.Golubyatnikov1@fulbrightmail.org, ^ba.glubokikh@g.nsu.ru

Following [1], where general principles of construction of threshold gene networks models, and corresponding biological interpretations are described, we consider the piecewise linear dynamical system

$$\frac{dx_1}{dt} = L^{(3)}(x_3) - x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = L^{(3)}(x_1) - x_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = L^{(3)}(x_2) - x_3 \quad (1)$$

which simulates kinetics in a simple gene network. The variables $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3$, denote concentrations of its components. The three-steps function $L^{(3)}$ decreases monotonically, it describes negative feedbacks in this gene network, and is defined by

$$\begin{aligned} L^{(3)}(w) &= 2c \text{ for } 0 \leq w < c - \varepsilon, \quad L^{(3)}(w) = c + \varepsilon \text{ for } c - \varepsilon \leq w < c, \\ L^{(3)}(w) &= c - \varepsilon \text{ for } c \leq w < c + \varepsilon, \quad L^{(3)}(w) = 0 \text{ for } c + \varepsilon \leq w < \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

where $c > \varepsilon > 0$.

Lemma 1. *The cubes $Q_2 = [0, 2c]^3$, $Q_1 = [c - \varepsilon; c + \varepsilon]^3 \subset Q_2$ are positively invariant domains of system (1), (2).*

To control trajectories of this system, we decompose Q_2 by nine planes $x_j = c - \varepsilon$, $x_j = c$, and $x_j = c + \varepsilon$ to 4^3 blocks [2, 5]. According to (2), we

enumerate them by the symbols $A, 0, 1, B$ in the multi-indices $\{\ell_1\ell_2\ell_3\}$:

$$\begin{aligned}\ell_j &= A \text{ if in the block } 0 \leq x_j < c - \varepsilon, \\ \ell_j &= 0 \text{ if in the block } c - \varepsilon \leq x_j < c, \\ \ell_j &= 1 \text{ if in the block } c \leq x_j < c + \varepsilon, \\ \ell_j &= B \text{ if in the block } c + \varepsilon \leq x_j \leq 2c.\end{aligned}\tag{3}$$

Theorem 1. *System (1), (2) has a stable cycle C_1 which passes from block to block according to the diagram*

$$\dots \rightarrow \{001\} \rightarrow \{011\} \rightarrow \{010\} \rightarrow \{110\} \rightarrow \{100\} \rightarrow \{101\} \rightarrow \dots$$

The union W_1 of the blocks listed above is the basin of attraction of the stable cycle C_1 . If $4\varepsilon \leq c$ then system (1), (2) has a stable cycle C_2 which passes from block to block according to the arrows of the diagram

$$\begin{aligned}\dots &\rightarrow \{BBA\} \rightarrow \{B1A\} \rightarrow \{B0A\} \rightarrow \{BAA\} \rightarrow \{BA0\} \\ &\rightarrow \{BA1\} \rightarrow \{BAB\} \rightarrow \{1AB\} \rightarrow \{0AB\} \rightarrow \{AAB\} \rightarrow \{A0B\} \\ &\rightarrow \{A1B\} \rightarrow \{ABB\} \rightarrow \{AB1\} \rightarrow \{AB0\} \rightarrow \{ABA\} \rightarrow \{0BA\} \\ &\rightarrow \{1BA\} \rightarrow \{BBA\} \rightarrow \dots\end{aligned}\tag{4}$$

Denote by W_2 the union of 18 blocks listed here. The cycle $C_2 \subset W_2$ is an example of a nonlocal stable oscillation [3]. The cube Q_1 is contained in the Attraction Basin of the cycle C_1 , this is the Hidden Attractor of system (1), (2) [4]. Existence of the cycles C_1, C_2 was shown in [5], stability of C_2 was not studied previously.

Performed within state assignment of the Sobolev institute of mathematics SB RAS, project FWNF-2022-0009.

The authors are indebted to A.I. Nazarov for helpful discussions.

References

- [1] Tchuraev R.N., Ratner. V.A. *A Continuous Approach with Threshold Characteristics for Simulation of Gene Expression*. In: Molecular Genetic Information System. Modelling and Simulation. p. 64–80. Berlin, Verlag 1983.
- [2] Glass L., Pasternack J.S. *Stable oscillations in mathematical models of biological control systems* J. Math. Biology. 6 (1978), 207–23.
- [3] Pliss V.A. *Nonlocal problems in the theory of oscillations*. NY, Acad. Press. 1966.

- [4] Dudkowski D., Prasad A., Kapitaniak T. *Perpetual points and hidden attractors in dynamical systems* Phys. Letters A. 379:40-41 (2015), 2591–2596.
- [5] Golubyatnikov V.P., Ayupova N.B., Bondarenko N.E., Glubokikh A.V. *Hidden attractors and nonlocal oscillations in gene networks models*. Russ. J. Num. Anal. Math. Modeling. 39:2 (2024), 75–81.

EXTERIOR 2D DIV-CURL PROBLEM FOR NON-SOLENOIDAL FLOWS WITH INFINITE ENERGY

GORSHKOV A.V.

Mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University, Russia
alexey.gorshkov.msu@gmail.com

We study 2D div-curl problem in exterior domain for the flow with given vorticity, divergency, boundary condition at infinity and no-slip condition on the solid surface. We will derive moment relations on vorticity and divergence for uniqueness solvability of the following problem:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{v}_\infty, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Here $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ - 2D vector field, $\operatorname{curl} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1$ is the vorticity, $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2$ - the divergence, $\mathbf{v}_\infty = (v_\infty, 0) \in \mathbb{R}^2$ - is the given fixed velocity of the horizontal flow at infinity, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ is the exterior to bounded simply connected domain G with a piecewise smooth boundary.

Quartapelle and Valz-Gris in paper [1] derived the projection conditions on the vorticity for solenoidal flows defined in bounded domains. In bounded and exterior domains for flows with finite energy this problem also was studied in papers [2] [3]. We will find a new condition for solvability of the above div-curl problem in the case of non-solenoidal exterior flows. For example, in exterior of the disk with

radius r_0 these conditions will have the form:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{w(\mathbf{x}) + i\rho(\mathbf{x})}{(x_1 + ix_2)^k} d\mathbf{x} = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \\ iv_{\infty}, & k = 1. \end{cases}$$

From Stokes' and Green's formulas follows that in the case of the non-zero circularity or in the case of the non-zero flux at infinity we will have $\int_{\Omega} (w(\mathbf{x}) + i\rho(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \neq 0$. Non-zero circularity and flux at infinity generate harmonic fields with infinite kinetic energy (see [4]). In order to obtain finite L_2 -norm $\|\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{v}_{\infty}\|_{L_2}$ one should additionally impose $\int_{\Omega} (w(\mathbf{x}) + i\rho(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = 0$. For L_p -estimates of $\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{v}_{\infty}$ with $p > 2$ this condition is not necessary.

We will use weighted space

$$L_{2,N}(\Omega) = \{f(x) : \|f(\cdot)\|_{L_{2,N}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 (1 + |x|^2)^N dx < \infty\}.$$

Our aim is to find restrictions on w, ρ for solvability of the div-curl problem (1)-(4) and to estimate its solution in H^1 -norm as

$$\|\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{v}_{\infty}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\rho\|_{L_{2,N}(\Omega)}^2 + \|w\|_{L_{2,N}(\Omega)}^2 \right). \quad (5)$$

Theorem 1. *Let Ω be the exterior domain with a piecewise smooth boundary such that there exists a Riemann mapping from Ω into exterior of the disk of the form $\Phi(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right)$, $\rho, w \in L_{2,N}(\Omega)$ with $N > 1$, and the moment relations*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{w(\mathbf{x}) + i\rho(\mathbf{x})}{\Phi(x_1 + ix_2)^k} d\mathbf{x} = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \setminus \{1\}, \\ iv_{\infty}, & k = 1 \end{cases}$$

are satisfied. Then there exists the unique solution $\mathbf{v}$ of the problem (1)-(4), and the estimate (5) holds.

References

- [1] L. Quartapelle and F. Valz-Gris, *Projection conditions on the vorticity in viscous incompressible flows*. Internat. J. Numer. Methods Fluids, **1**(2), 129–144, (1981).
- [2] G. Auchmuty and J. C. Alexander, *L^2 well-posedness of planar div-curl systems*. Arch. Ration. Mech. Anal., **160**, 91–134, (2001).
- [3] M. Neudert and W. von Wahl, *Asymptotic behaviour of the div-curl problem in exterior domains*. Adv. Differ. Equ., **6**(11), 1347–1376, (2001).

- [4] A. V. Gorshkov, *On the unique solvability of the div-curl problem in unbounded domains and energy estimates of solutions.* Theor. Math. Phys., **221**, 1799–1812, (2024).
- [5] A. V. Gorshkov, *Associated Weber-Orr transform, Biot-Savart law and explicit form of the solution of 2D Stokes system in exterior of the disc.* J. Math. Fluid Mech., **21**(41), (2019).

A CLASS OF ANISOTROPIC DIFFUSION-TRANSPORT EQUATIONS IN NON-DIVERGENCE FORM

HOANG L.^{1,a}, IBRAGIMOV A.^{1,b}

¹Department of Mathematics and Statistics, Texas Tech University, 1108 Memorial Circle, Lubbock, TX 79409–1042, U. S. A

^aluan.hoang@ttu.edu, ^bIlya1Sergey@gmail.com

We generalize Einstein’s probabilistic method for the Brownian motion to study compressible fluids in porous media. The multi-dimensional case is considered with general probability distribution functions. By relating the expected displacement per unit time with the velocity of the fluid, we derive an anisotropic diffusion equation in non-divergence form that contains a transport term. Under the Darcy law assumption, a corresponding nonlinear partial differential equations for the density function is obtained. The classical solutions of this equation are studied, and the maximum and strong maximum principles are established. We also obtain exponential decay estimates for the solutions for all time, and particularly, their exponential convergence as time tends to infinity. Our analysis uses some transformations of the Bernstein-Cole-Hopf type which are explicitly constructed even for very general equation of state. Moreover, the Lemma of Growth in time is proved and utilized in order to achieve the above decaying estimates.

References

- [1] Einstein A. *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.* Annalen der Physik, 322 (1905), 549–560.
- [2] Landis E.M. *Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 171, Rhode Island: AMS, 1998.

GROUP FOLIATIONS FOR EQUATIONS OF LAGRANGIAN HYDRODYNAMICS AND GEOPOTENTIAL FORECASTING

KAPTSOV E.I.^{1,a}, MELESHKO S.V.^{1,b}

¹Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, Thailand

^aevgkaptsov@math.sut.ac.th, ^bsergey@math.sut.ac.th

The method of group foliations (also known as stratifications) is relatively less common compared to other approaches in group analysis employed for obtaining reductions and exact solutions of partial differential equations. The concept of group foliations was introduced by S. Lie and further developed in the works of E. Vessiot and L.V. Ovsiannikov. The latter author formulated the method in its modern form by constructing an explicit representation of the foliation [1].

The method addresses the problem posed by S. Lie as follows: given a system of differential equations E and a group of transformations G admitted by E , the task is to find (a) equations describing the orbits of solutions of E under the action of transformations $g \in G$, and (b) equations whose solutions determine the complete set of these orbits.

It was shown, based on the theory of differential invariants [1], that the original system of equations can be represented as two subsystems: the automorphic system and the resolving system. These subsystems are formulated in terms of the differential invariants of the symmetry generator X , associated with the group with respect to which the foliation is carried out, as well as in terms of new functions depending on these invariants as independent variables. From a practical standpoint, solving the two resulting subsystems is frequently simpler than solving the original equations. Moreover, the method sometimes enables the construction of invariant solutions in a more general form than those obtained through standard reductions [2].

It is natural to choose as X a generator corresponding to an infinite-dimensional transformation group in order to obtain an automorphic system with the broadest possible set of solutions. Such groups are frequently encountered in hydrodynamic-type equations in Lagrangian coordinates [3, 4, 5, 6]. In [6], S.V. Meleshko constructed a group

foliation of the two-dimensional shallow water equations in Lagrangian coordinates using the relabeling symmetry. It was found that, in this case, the automorphic system is isomorphic to the equations relating Eulerian and Lagrangian coordinates, while the resolving system is isomorphic to the shallow water equations in Eulerian coordinates. Subsequently, a similar structure applies to equations of a more general form [3, 4].

The construction of group foliations is computationally complex, which has led most authors to limit their analysis to equations of first or second order. Fortunately, with the development of modern symbolic computation systems, it is now possible to construct foliations for more complex equations. As an example, in [5], foliations were constructed for the β -plane barotropic vorticity equation (known in Russian literature as the geopotential forecast equation), which is third-order.

This research was supported by (i) Suranaree University of Technology (SUT) and (ii) Russian Science Foundation (Project Code 23-11-00027).

References

- [1] Ovsiannikov L.V. *Group analysis of differential equations*. Nauka, Moscow, 1978.
- [2] Golovin S.V. *Applications of the differential invariants of infinite dimensional groups in hydrodynamics*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 9(1) (2004), 35-51.
- [3] Kaptsov E.I., Meleshko S.V. *Symmetry analysis of the two-dimensional stationary magnetogasdynamics equations with Coriolis force in Lagrangian coordinates*. Stud. Appl. Math., 154 (2025), P. e70015.
- [4] Meleshko S.V., Kaptsov E.I. *Symmetry analysis of the two-dimensional stationary gas dynamics equations in Lagrangian coordinates*. Mathematics (MDPI), 12(6) (2024), P. 879.
- [5] Kaptsov E.I. *Group foliations of the β -plane barotropic vorticity equation*. J. Math. Phys., 65(8) (2024), P. 083505.
- [6] Dorodnitsyn V.A., Kaptsov E.I., Meleshko S.V. *Lie group symmetry analysis and invariant difference schemes of the two-dimensional shallow water equations in Lagrangian coordinates*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 119 (2023), P. 107119.

ON ASYMPTOTIC REPRESENTATION FOR THE MIXED TYPE EQUATION

KAPUSTINA T.

Moscow State University, Russia
tatiana.kapustina@math.msu.ru

Let us denote $\Omega = \{0 < x < 1, -1 < y < 1\}$, $\Omega^+ = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{y < 0\}$, $\Sigma = \partial\Omega \setminus \{y = 1\}$. Consider singularly perturbed problem for mixed type equation

$$\varepsilon u_{xx} - A(x, y)u_y - B(x, y)u = F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega^+, \quad (1)$$

$$\varepsilon \Delta u + C(x, y)u_y - D(x, y)u = H(x, y), \quad (x, y) \in \Omega^-, \quad (2)$$

$$u(x, y, \varepsilon)|_{(x, y) \in \Sigma} = 0, \quad (3)$$

$$u(x, -0, \varepsilon) = u(x, +0, \varepsilon), \quad u_y(x, -0, \varepsilon) = u_y(x, +0, \varepsilon), \quad (4)$$

ε is a small positive parameter. The solution $u(x, y, \varepsilon)$ is a function of $C^2(\Omega^+) \cap C^2(\Omega^-) \cap C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ class. We presume that the all the coefficients of equation (1)–(2) are smooth functions, $A(x, y)$, $B(x, y)$ and $D(x, y)$ are positive in $\bar{\Omega}$. Such assumption guarantees the unique solvability of the problem (1)–(4) [1]. The aim is to study asymptotic behavior of solution $u(x, y, \varepsilon)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

Case 1. $C(x, y) > 0$. In this case degenerate problem consists of equation (1)–(2) with $\varepsilon = 0$:

$$A(x, y)(u_0)_y + B(x, y)u_0 = -F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega^+, \quad (5)$$

$$C(x, y)(u_0)_y - D(x, y)u_0 = H(x, y), \quad (x, y) \in \Omega^-, \quad (6)$$

and two sewing conditions (4).

The leading term of asymptotic representation [2]–[4]:

$$U(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} U^+(x, y, \varepsilon), & (x, y) \in \Omega^+, \\ U^-(x, y, \varepsilon), & (x, y) \in \Omega^-, \end{cases}$$

$$U^+(x, y, \varepsilon) = u_0^+(x, y) + w^+ \left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, y \right) + \tilde{w}^+ \left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}, y \right);$$

$$U^-(x, y, \varepsilon) = u_0^-(x, y) + v^- \left(x, \frac{y+1}{\varepsilon} \right) + w^- \left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, y \right) + \\ + \tilde{w}^- \left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}, y \right) + z \left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1+y}{\varepsilon} \right) + p \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{1+y}{\varepsilon} \right) +$$

$$+\tilde{z}\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1+y}{\varepsilon}\right)+\tilde{p}\left(\frac{1-x}{\varepsilon}, \frac{1+y}{\varepsilon}\right).$$

Theorem. *For all small enough ε the following estimate holds*

$$\max_{(x,y)\in\bar{\Omega}}|u(x,y,\varepsilon)-U(x,y,\varepsilon)|\leq M\sqrt{\varepsilon},$$

where the constant M does not depend on ε . Thus, function $U(x,y,\varepsilon)$ is a uniform asymptotic representation for the solution $u(x,y,\varepsilon)$.

Case 2. $C(x,y) < 0$. In this case degenerated problem consists of equation (5)–(6) with additional conditions

$$u_0(x,y)\Big|_{y=-1}=0, \quad u_0(x,+0)=u_0(x,-0).$$

In this case solution $u(x,y,\varepsilon)$ has boundary layers near left and right borders of Ω , along with interior layer near the line $y = 0$ of type change. In this case special boundary functions, similar to the functions $z, \tilde{z}, p, \tilde{p}$, appear in the neighborhood of points $(0,0)$ and $(1,0)$, where interior layer intersects boundary layers.

The main result is a theorem about error estimate, which is similar to the Theorem of Case 1.

References

- [1] T.D.Dzhuraev. *Boundary value problems for mixed type equations*. Fan Publishers, Tashkent: 1979.
- [2] V.G.Sushko. *Asymptotic representations for solutions of bisingular problems*. Memoirs on Diff. Equations and Math. Physics. Tbilisi. 18(1999), 51–159.
- [3] A.B.Vasil'eva, V.F.Butuzov. *Asymptotic methods in singular perturbation theory*. Moscow: Vysshaya shkola. 1990.
- [4] N.Kh.Rozov, T.O.Kapustina. *One boundary problem for elliptic–parabolic equation*. Diff. Equations. 37, 6(2001), 847–848.

TOPOLOGICAL INVARIANTS OF NONDEGENERATE SINGULARITIES AND THEIR REALIZATION VIA INTEGRABLE BILLIARDS

KIBKALO V.^{1,2,a}, OSHEMKOV A.^{1,b}

¹Lomonosov Moscow State University, Russia

²Leninskie Gory 1, Russia

^aslava.kibkalo@gmail., ^ba@oshemkov.ru

Hamiltonian system $v = \text{sgrad } H = \omega^{ij}(dH)_j$ on a symplectic manifold (M^{2n}, ω) is called an integrable one if a set of first integrals F_i for $i = 1, \dots, n$ exists s.th. $\{F_i, F_j\} = 0$ and set of dF_i is linear independent almost everywhere on M^{2n} .

Topological approach to integrable systems was suggested and developed by A.Fomenko and his scientific school [1]. The notion of nondegenerate singularities generalizes the property of a critical point of a function to be of the Morse type. Nondegenerate critical points of IHS with n degrees of freedom are described by rank r of the system $\text{sgrad } F_i$ at this point and numbers n_e, n_s, n_f of elliptical, saddle and focal components of the local singularity: $n = r + n_e + n_s + 2n_f$.

Confocal family of quadrics in $\mathbb{R}^{n+1}$ is determined by following formula

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \dots + \frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1} - \lambda} = 1, \quad a_i \leq a_{i+1}$$

If set of a_i are pairwise different $a_i \neq a_j$, then Liouville foliation for billiard in this domain contains singularities with saddle and elliptic (2-dimensional) components. Pairs of equal semi-axes correspond to focal (4-dimensional) components of singularities. This effect takes place for both geodesic flows on such a surface $\lambda = \lambda_0$ and for billiards on tables (domains) bounded by them.

As it turns out, integrable billiard systems and their generalizations can be used to model (up to fiberwise homeomorphisms) a wide class integrable Hamiltonian systems, including well-known systems of rigid body dynamics and physics [3].

Two generalizations we will discuss and apply are billiard books (suggested by V.Vedyushkina) and adding of a potential field to the Hamiltonian $H = \sum_i \dot{x}_i^2$. We will use a Hooke potential field $\pm k(\sum_i x_i^2)$.

Multi-dimensional analog of billiard books suggested later by V.Kibkalo turns out to be a sufficient class to model nondegenerate singularities.

1. Consider case $n = 2$ and an ellipsoid with semi-axes $a_1 = a_2 < a_3$ in $\mathbb{R}^3$. Domain Ω_1 is bounded by such an ellipsoid, hyperboloid $a_2 < \lambda < a_3$ and plane $x_3 = 0$. The book is glued from several copies by their boundary facets (cells of codimension 1) equipped with permutations.

Theorem 1. *Arbitrary saddle-focal $(0, 1, 1)$ nonsplittable singularity of integrable Hamiltonian system can be modeled (up to fiberwise homeomorphism) by an appropriate billiard book with a repelling Hooke glued from domains Ω_1 .*

2. Singularities of type $(0, 0, 2)$ with 2 focal components can be modeled by billiard books glued by similar domain Ω_2 bounded by an ellipsoid in R^4 with $a_1 = a_2 < a_3 = a_4$ and a hyperboloid confocal with this ellipsoid. The proof follows from the fact that such singularities (in an invariant neighbourhood of a singular fiber) can be classified by combinatorial information about this fiber [4].

3. Even in a two-dimensional case, topology of Liouville foliation of a billiard inside an ellipse (i.e., when domain contains foci of quadrics) is more complicated than for other domains. Thus it is also of interest to describe singularities of geodesic flows on multi-dimensional ellipsoids. As it turned out, this integrable Hamiltonian system can have complicated singularities. Already for a three-dimensional ellipsoid in $\mathbb{R}^4$, a focal singularity appears in the case when the two middle semi-axes are equal [5]. In larger dimensions there is a similar effect, namely, in the presence of equal semi-axes, this system has singularities with focal components. We will describe such singularities for ellipsoids of small dimensions in terms of almost direct products and their models by billiard books.

This research was supported by Russian Science Foundation under grant 22-71-10106.

References

- [1] Bolsinov A.V., Fomenko A.T. *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*. Chapman & Hall/CRC, 2004.

- [2] Nguyen Tien Zung *Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I. Arnold-Liouville with singularities*. Compositio Math., 101:2 (1996), 179-215.
- [3] Fomenko A.T., Vedyushkina V.V. *Billiards and integrable systems*. Russian Math. Surveys, 78:5 (2023), 881-954.
- [4] A. M. Izosimov, *Classification of almost toric singularities of Lagrangian foliations*, Sb. Math., 202:7 (2011), 1021–1042.
- [5] Davison, C.M., Dullin, H.R. *Geodesic flow on three-dimensional ellipsoids with equal semi-axes*. Regul. Chaot. Dyn. 12 (2007), 172–197.

ON BLOW-UP CONDITIONS FOR ENTIRE SOLUTIONS OF NONLINEAR HIGHER ORDER DIFFERENTIAL INEQUALITIES

KON'KOV A.A.^{1,a}, SHISHKOV A.E.^{2,b}

¹Lomonosov Moscow State University, Russia

²RUDN University, Russia

^akonkov@mech.math.msu.su, ^baeshkv@yahoo.com

We consider the differential inequality

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x, u) \geq g(|u|) \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

where $m, n \geq 1$ are integers and a_α are Caratheodory functions such that

$$|a_\alpha(x, \zeta)| \leq A|\zeta|, \quad |\alpha| = m,$$

with some constant $A > 0$ for almost all $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ and for all $\zeta \in \mathbb{R}$. It is assumed that g is a non-decreasing convex function on the interval $[0, \infty)$ such that $g(\zeta) > 0$ for all $\zeta > 0$.

A function $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ is a solution of (1) if $g(|u|) \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ and

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m a_\alpha(x, u) \partial^\alpha \varphi \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} g(|u|) \varphi \, dx$$

for any non-negative function $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 1. *Let $n > m$ and, moreover,*

$$\int_1^\infty g^{-1/m}(\zeta) \zeta^{1/m-1} \, d\zeta < \infty \quad (2)$$

and

$$\int_0^1 \frac{g(r) dr}{r^{1+n/(n-m)}} = \infty.$$

Then any solution of (1) is trivial.

The proof of Theorem 1 is given in [1] (see also [2]).

Remark 1. In accordance with [2, Theorem 2.5] if $n \leq m$, then for triviality of solutions of inequality (1) it is sufficient that (2) is valid.

Example 1. Consider the inequality

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x, u) \geq c_0 |u|^\lambda \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad c_0 = \text{const} > 0, \quad (3)$$

where $n > m$ and λ is a real number. By Theorem 1, if

$$1 < \lambda \leq \frac{n}{n-m} \quad (4)$$

then any solution of (3) is trivial. It is well-known that, for power-law nonlinearities, condition (4) can not be improved [3].

Example 2. We examine the critical exponent $\lambda = n/(n-m)$ in (4). Namely, consider the inequality

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x, u) \geq c_0 |u|^{n/(n-m)} \log^\mu \left(e + \frac{1}{|u|} \right) \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad c_0 = \text{const} > 0,$$

where $n > m$ and μ is a real number. By Theorem 1, if $\mu \geq -1$, then any solution of this inequality is trivial.

The work of the first author was supported by the Russian Ministry of Education and Science as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement 075-15-2022-284 (critical exponents), and by the Russian Science Foundation, project 20-11-20272-II (estimates of global solutions). The work of the second author was supported by the Russian Science Foundation, project 23-11-00056 (asymptotic properties of solutions).

References

- [1] Kon'kov A.A., Shishkov A.E., *On a Dini type blow-up condition for solutions of higher order nonlinear differential inequalities*. Doklady Math., 110 (2024), 308–311.
- [2] Kon'kov A.A., Shishkov A.E., *Generalization of the Keller-Osserman theorem for higher order differential inequalities*. Nonlinearity, 32 (2019), 3012–3022.
- [3] Mitidieri E., Pohozaev S.I. *A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities*. Proc. V.A. Steklov Inst. Math., 234 (2001), 3–383.

PROPERTIES OF THE SOLUTIONS TO THE DISCRETE SECOND-ORDER EMDEN-FOWLER TYPE EQUATION

KOROBKO E.

Lomonosov Moscow State University, Russia
Plekhanov Russian University of Economics, Russia
jakovi300195@yandex.ru

Let us define one second-order non-linear discrete equation

$$\Delta^2 u(k) \pm k^\alpha u^m(k) = 0, \quad (1)$$

where $u : \mathbb{N}(k_0, h) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{N}(k_0, h) := \{k_0, k_0 + h, k_0 + 2h, \dots\}$, and $\Delta u(k)$ - is the first difference such that $\Delta u(k) = \frac{1}{h} (u(k+1) - u(k))$, $m \neq \{0, 1\}$, $\alpha \neq -2$. We call this equation as the discrete analogue of the well-known Emden-Fowler type equation of the second order

$$y''(x) \pm x^\alpha y^m(x) = 0. \quad (2)$$

Definition 1. A function

$$u_{upp} : \mathbb{N}(k_0, h) \rightarrow \mathbb{R}$$

is said to be an approximate solution to equation (1) of an order g where $g : \mathbb{N}(k_0, h) \rightarrow \mathbb{R}$ if

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\Delta^3 u_{upp}(k) \pm k^\alpha u_{upp}^n(k)]g(k) = 0.$$

If the main term (i.e. the term being asymptotically leading) in $u_{upp}(k)$ is a power-type function, we say that it is a power-type approximate solution.

Theorem 1. For equation (2) the function

$$u_{app}(k) = ak^{-s} + bk^{-(s+1)}, k \in \mathbb{N}(k_0), \quad (3)$$

$$s = \frac{\alpha + 2}{m - 1}, \quad a = (\mp s(s + 1))^{1/(m-1)}, \quad b = \frac{ash(s + 2)}{s + 2 - ms}, \quad (4)$$

is a power-type approximate solution of order $g(k) = k^{s+3}$.

Remark 1. If, in formula (4), either the upper variant of sign is in force (i.e. $-$) and $s(s + 1) > 0$ or in (4) lower variant of sign in force (i.e. $+$) and $s(s + 1) < 0$, then the constant m has the form of a ratio m_1/m_2 of relatively prime integers m_1, m_2 , and m_2 is odd, the difference $m_1 - m_2$ is odd as well. If this convention holds, the formula (3) defines two or at least one value. As equation (1) splits into two equations, when formulating the results, we assume that a concrete variant is fixed (either with the sign $+$ or with the sign $-$).

We discuss the existence of the solutions to equation (1) of the form

$$u(k) = ak^{-s} + bk^{-(s+1)} + O(k^{-(s+\gamma+1)}), \gamma \in (0, 1).$$

The necessary properties of the existence of power-type solutions where $h = 1$ are given in the articles [2], [3], [4], [5].

Let us note that when $h \rightarrow 0$ the first difference transforms to the first derivative. And (4) turns to the following

$$s_0 = \frac{\alpha + 2}{m - 1}, \quad a_0 = (\mp s(s + 1))^{1/(m-1)}, \quad b_0 = 0.$$

This gives us the equation (2), described by R.Bellman in [1]. Moreover when $h = 0$ then $u_{app}(x) = a_0 x^{-s_0}$ is the solution to the equation (2).

Acknowledgement

This research was supported by Basis Foundation scholarship.

References

- [1] BELLMAN R. *Stability Theory in Differential Equations*. Dover Publications, Inc., New York, 2008, 176 pp.
- [2] Astashova I., Diblik J., Korobko E. *Existence of a solution of discrete Emden-Fowler equation caused by continuous equation* Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S, V.14, N12 (2021) p.4159–4178.

- [3] Diblik J., Korobko E. *Asymptotic behavior of solutions of a second-order nonlinear discrete equation of Emden-Fowler type*. Advances in Nonlinear Analysis. Walter de Gruyter GmbH & Co.KG. (Berlin, Germany), V.12. N1 (2023), p. 1–23.
- [4] Korobko E. *Asymptotic characterization of solutions of Emden-Fowler type difference equation*. Proceedings II of the Conference Student EEICT (2021), p.250–254.
- [5] Korobko E.V. *A discrete analogue of the Emden-Fowler type equation and its solutions equivalent to power functions. (russian)* Differential equations, Nauka, 60, N6. (2024), p. 861–863

ON THE BRINKMAN-STOKES SYSTEM MODELLING A FILTRATION PROCESS BY FLOW OF A VARIABLE VISCOSITY

KOROLEVA YU.O.

HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Applied Mathematics, Moscow,
Russia
yo.koroleva@hse.ru

Describe the viscous flow through a porous medium, modeled as a set of parallel composite cylindrical particles, and filled by liquid with varying viscosity by two systems: the Stokes one (1) outside the porous layer

$$B_\gamma = \{1 \leq r \leq \frac{1}{\gamma}, \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, \infty)\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla p^o = \Delta \mathbf{v}^o \text{ in } B_\gamma, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}^o = 0 \text{ in } B_\gamma, \\ \frac{dv_z^o}{dr} = 0 \text{ on } r = \frac{1}{\gamma}, v_z^o = v_z^i \text{ on } r = 1, \end{array} \right. \quad (1)$$

and in the porous layer

$$B_R = \{R \leq r \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, \infty)\}$$

by the Brinkman's dimensionless system (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla p^i = \operatorname{div}(\mu(r) D\mathbf{v}^i) - \frac{\mathbf{v}^i}{k} \text{ in } B_R, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}^i = 0 \text{ in } B_R, \\ v_z^i = 0 \text{ on } r = R, \\ \frac{dv_z^i}{dr} = \frac{dv_z^o}{dr} + \frac{\beta}{\sqrt{k}} v_z^o \text{ as } r = 1. \end{array} \right. \quad (2)$$

Here v^o, v^i are the velocity fields, p^o, p^i are the pressure, k is the specific permeability of the porous layer, $\mu(r) > 0$ is the dimensionless viscosity of the Brinkman's liquid in the porous layer. The boundary condition in (2) describes the jump of tangential stresses at the interface between porous layer and a clear liquid. The parameter β can be find from a physical experiment.

The presented Stokes-Brinkman's system with varying viscosity was analyzed. The existence and uniqueness of the weak solution was proved for an arbitrarily viscosity function. Moreover, some uniform estimates which show the behaviour of the flow depending on the variable viscosity were derived. In particular, the mathematical justification of the physical phenomena was done: the greater the viscosity the less the speed of the flow.

References

- [1] Koroleva Yu.O. *Qualitative properties of the Brinkman-Stokes system modelling a filtration process by flow of a variable viscosity*. Mathematics and Statistics, 4(5), (2017), 143 – 150.
- [2] Filippov A.N., Koroleva Yu.O. *Viscous flow through a porous medium filled by liquid with varying viscosity*. Buletinul Academiei de EhtiinEJe a Republicii Moldova. Matematica, 3(85), (2017), 74-87.

HIGHER DIMENSIONAL FOURIER QUASICRYSTALS FROM LEE-YANG VARIETIES

KURASOV P..

Stockholm Univ., Sweden

Dept. of Mathematics, Stockholm Univ., 106 91 Stockholm, Sweden

kurasov@math.su.se

Fourier Quasicrystals (FQ) are defined as crystalline measures

$$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda} \delta_{\lambda}, \quad \hat{\mu} = \sum_{s \in S} b_s \delta_s,$$

so that not only μ (and hence $\hat{\mu}$) are tempered distributions, but also

$$|\mu| := \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_{\lambda}| \delta_{\lambda} \quad \text{and} \quad |\hat{\mu}| := \sum_{s \in S} |b_s| \delta_s,$$

are tempered. One-dimensional FQs with positive integer weights (that is $a_{\lambda} \in \mathbb{N}$) can be described using stable Lee-Yang polynomials, as was proven in a joint work with Peter Sarnak. Multidimensional Fourier quasicrystals are discussed in the current talk. It is shown that a rather general family of FQs in $\mathbb{R}^d$ with positive integer weights can be constructed using co-dimension d Lee-Yang varieties in $\mathbb{C}^n$, $n > d$. These complex algebraic varieties are symmetric and avoid certain regions in $\mathbb{C}^n$, thus generalising zero sets of Lee-Yang polynomials. It is shown that such FQs can be supported by Delaunay almost periodic sets and are genuinely multidimensional in the sense that their restriction to any one-dimensional subspace is not given by a one-dimensional FQ. Connections to alternative recent approaches by Yves Meyer, Lawton-Tsikh and de Courcy-Ireland-K. are clarified. Is it possible that our construction gives all multidimensional FQs with positive integer masses?

This is joint work with L. Alon, M. Kummer, and C. Vinzant.

This research was supported by the Swedish Research Council, grants 2020-03780 and 2024-04650

References

- [1] L. Alon, M. Kummer, P. Kurasov, and C. Vinzant, *Higher dimensional Fourier quasicrystals from Lee-Yang varieties*, Invent. Math. **239** (2025), no. 1, 321–376; MR4841781

- [2] P. B. Kurasov and P. C. Sarnak, *Stable polynomials and crystalline measures*, J. Math. Phys. **61** (2020), no. 8, 083501, 13 pp.; MR4129870

OPTIMAL SHIELDING OF GRAVITY AND EINSTEIN'S FIELD EQUATIONS OF GENERAL RELATIVITY

LEFLOCH P.G.

Sorbonne University, France

Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), France

contact@philippelefloch.org

We discuss a nonlinear elliptic system of partial differential equations arising in Riemannian geometry and general relativity. Specifically, we present recent advances in the analysis of asymptotically Euclidean initial data sets for Einstein's field equations. In collaboration with *Bruno Le Floch (LPTHE, Sorbonne)*, we proved that two solutions can be glued together along possibly nested conical domains. The constructed solutions may exhibit arbitrarily slow decay at infinity, while satisfying (super-) harmonic estimates within possibly narrow cones extending to infinity. This leads to a proof of a conjecture by Alessandro Carlotto and Richard Schoen concerning the shielding of gravity at infinity.

This lecture is based on the following works: arXiv:2312.17706 [gr-qc] and arXiv:2402.17598 [gr-qc].

EXPLORING THE DYNAMICS OF OPTICAL SOLITONS IN AN INHOMOGENEOUS NONLINEAR SCHROEDINGER EQUATION WITH $\mathcal{PT}$ -SYMMETRIC POTENTIAL

MANIKANDAN K.¹, SAKKARAVARTHI K.², SABARI S.³

¹Center for Nonlinear and Complex Networks, SRM TRP Engineering College,
Tiruchirappalli - 621 105, Tamil Nadu, India

²Department of Physics, Pachaiyappas College for Men, Kanchipuram - 631501,
Tamil Nadu, India

³Instituto de Fisica Teorica, Universidade Estadual Paulista, 01140-070 Sao Paulo,
SP, Brazil

Over the past two decades, there has been significant interest in exploring physical systems that exhibit parity time reversal $\mathcal{PT}$ -symmetry. Importantly, the concept $\mathcal{PT}$ -symmetry, which has root in

quantum mechanics, gained prominence in optics due to the pioneering work of Christodoulides and collaborators [1]. A major focus of these studies has been the investigation of localized wave phenomena in $\mathcal{PT}$ symmetric media, particularly due to the unique interplay of gain and loss in nonlinear optical systems. Motivated by these developments, this work aims to explore the dynamics of optical solitons in inhomogeneous media governed by $\mathcal{PT}$ -symmetric potential. For this purpose, we consider the variable coefficients nonlinear Schroedinger equation with a $\mathcal{PT}$ -symmetric potential given by

$$i\psi_z + \frac{\delta(z)}{2}\psi_{xx} + \rho(z)|\psi|^2\psi + \mu(z)x^2\psi + [\lambda(x, z) + i\gamma(x, z)]\psi = 0. \quad (1)$$

where $\psi(x, z)$ represents the complex field/mode, with z representing the propagation direction and x denoting the transverse spatial coordinate. The coefficients $\delta(z)$, $\rho(z)$ and $\mu(z)$ correspond to the longitudinally varying dispersion, nonlinearity, and tapering effects, respectively. The real part of the complex potential, $\lambda(x, z)$, is typically associated with the refractive index distribution, while its imaginary part, $\gamma(x, z)$, accounts for gain and loss characteristics in the optical medium. Employing a similarity transformation technique, we construct the exact inhomogeneous optical soliton solutions under specific integrability constraints between the inhomogeneity parameters. To explore the influence of inhomogeneity on soliton dynamics, we examine three different forms of dispersion modulations, namely periodic, localized well/barrier-type, and step-like profiles. Our analysis reveals the various intriguing nonlinear phenomena, including periodic, localized, single-step suppression or amplification, broadening and narrowing of width, and advancing and delaying the transitions during soliton propagation in inhomogeneous media [2]. In addition, we perform a direct numerical experiment to ensure the obtained analytical findings. The observed results offer deeper insight into the behavior of solitons in $\mathcal{PT}$ -symmetric inhomogeneous optical media and may be valuable in the design of advanced photonic systems and optical communication technologies.

References

- [1] Z.H. Musslimani, K.G. Makris, R. El-Ganainy, D.N. Christodoulides, *Optical Solitons in PT periodic potentials*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 030402.

- [2] K. Manikandan, K. Sakkaravarthi, S. Sabari, Dispersion management and optical soliton engineering in nonuniform inhomogeneous $\mathcal{PT}$ -symmetric nonlinear media, *Physica D Nonlinear Phenomena* **470**, (2024) 134388.

CHAOS IN SYSTEMS WITH HYSTERESIS

N. BEGUN

nikitabegun88@gmail.com

Speaking informally, hysteresis is a phenomenon in which the present depends not only on variables, but also on the prehistory of the system itself. Research in this area (mainly in the PDE field) began a long time ago, but so far no one has wondered if the prehistory of the system can make it chaotic.

We consider a dynamical system with hysteresis. The system is motivated by modifications of general-equilibrium macroeconomic models that attempt to capture risks and memory dependence of realistic economic agents. Global dynamics and bifurcations of this system are studied depending on two parameters. We show that for a certain open set of parameter values, the system exhibits chaotic behavior. To understand the nature of this type of chaos, we introduce a map, which we call the chainsaw mapping, and discuss its properties.

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEVIATING ARGUMENTS

PARTSVANIA N.

A. Razmadze Mathematical Institute, Tbilisi State University, Georgia
nino.partsvania@tsu.ge

On a finite interval $[a, b]$, we consider the differential equation

$$u'(t) = f(t, u(\tau(t))) \quad (1)$$

with the boundary condition

$$\int_a^b u(s) d\varphi(s) = c. \quad (2)$$

Here $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous and locally Lipschitz in the second argument function, $\tau : [a, b] \rightarrow [a, b]$ is a continuous function, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is a nondecreasing function, and c is a positive constant.

Conditions are found guaranteeing, respectively, the existence and uniqueness of a positive solution to problem (1), (2).

In particular, the following theorems are proved.

Theorem 1. *Let either the conditions*

$$f(t, 0) = 0, \quad f(t, x) \leq 0 \text{ for } a \leq t \leq b, \quad x \geq 0, \quad (3)$$

$$\tau(t) \geq t \text{ for } a \leq t \leq b, \quad \varphi(a+) > \varphi(a), \quad (4)$$

or the conditions

$$f(t, 0) = 0, \quad f(t, x) \geq 0 \text{ for } a \leq t \leq b, \quad x \geq 0, \quad (5)$$

$$\tau(t) \leq t \text{ for } a \leq t \leq b, \quad \varphi(b-) < \varphi(b) \quad (6)$$

hold. Then problem (1), (2) has at least one positive solution.

Theorem 2. *Let conditions (3), (4) (conditions (5), (6)) hold, and let the function f be nonincreasing (be nondecreasing) in the second argument. Then problem (1), (2) has a unique positive solution.*

BERGER TYPE LORENTZIAN STRUCTURES

PODOBRYAEV A.V.

A. K. Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Russia
alex@alex.botik.ru

We consider the deformation of the standard Lorentzian metric on the anti de-Sitter space along the fibers of the Hopf fibration. Our goal is the description of the longest arcs. More precisely, we deal with the universal covering of this Lorentzian manifold to exclude a priori presence of time-like cycles. Using the methods of geometric control theory, we describe the attainable set, we study the question of the existence of the longest arcs [1], we investigate geodesics and their optimality, i.e., we find the cut time and the cut locus. The answer depends significantly on whether the metric is oblate or prolate.

Let us define the Lorentzian manifold we deal with. Consider the surface

$$\mathbb{H}^{1,n} = \{(z, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid -|z|^2 + |w|^2 = -1\},$$

where $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ and $|w|^2 = |w_1|^2 + \dots + |w_n|^2$. Define the quadratic form of the signature $(1, 2n)$ on the tangent space $T_o\mathbb{H}^{1,n} = \{(ia, w) \mid a \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}\}$ at a fixed point $o = (1, 0)$

$$Q_o(a, w) = -I_1 a^2 + I_2 |w|^2,$$

where $I_1, I_2 > 0$ are fixed. We get the quadratic form Q on $\mathbb{H}^{1,n}$ by the shifts of the form Q_o via the transitive action of the Lie group $U_{1,n}$ on $\mathbb{H}^{1,n}$. In other words, we are interested in invariant Lorentzian structures on the homogeneous space $U_{1,n}/U_n$. We call them *Berger type Lorentzian structures* by analogue with well known *Berger spheres* $U_{n+1}/U_n \simeq S^{2n+1}$. Cut loci for Berger spheres were found by C. Rakotonaiaina [2].

A curve is called *an admissible* if almost all of its velocities are inside or on the border of the light cones. *The length of the curve* is defined with the help of the quadratic form Q . *The Lorentzian distance* from one point to another is the supremum of Lorentzian lengths of all admissible curves from the first point to the second one. If the curve where this supremum is achieved exists, then it is called *the longest arc*.

We consider the universal covering $M = \{(c, w) \mid c \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}^n\}$ of our manifold $\mathbb{H}^{1,n}$ to avoid admissible cycles which lead to non-existence the longest arcs.

Theorem 1. *We have the following description of the attainable set $\mathcal{A}$.*

- (1) *If $I_1 > I_2$, then $\mathcal{A} = M$. In particular, the longest arcs do not exist.*
- (2) *If $I_1 = I_2$, then $\mathcal{A} = \{(c, w) \in M \mid \arctan |w| \leq c\}$. The longest arcs exist only for the terminal points located in the set*

$$\mathcal{A}_{exist} = \{(c, w) \in M \mid \arctan |w| \leq c < \pi - \arctan |w|\} \cup \{(\pi, 0)\}.$$

- (3) *If $I_1 < I_2$, then*

$$\mathcal{A} = \left\{ (c, w) \in M \mid c \geq \arctan \left(\frac{\tan(\tau\sqrt{\eta}) + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \tanh \tau}{1 - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \tanh \tau \tan(\tau\sqrt{\eta})} \right) \right\},$$

$$\tau = \operatorname{arcsinh}\left(|w| \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta+1}}\right)\Bigg\},$$

where $\eta = \frac{I_2}{I_1} - 1$. Any point of the set $\mathcal{A}$ can be reached from the point $\tilde{o} = (0, 0)$ by the longest arc.

The cut time is the time when a geodesic loses optimality starting from the point $\tilde{o}$. The cut time is a function of a geodesic's initial momentum $h \in \mathfrak{u}_n^\circ \subset \mathfrak{u}_{1,n}^*$, where the gothic symbols denote the corresponding Lie algebras.

Theorem 2. *The cut locus and the cut time have the following description, where Kil is the Killing form and $|h| = \sqrt{|\operatorname{Kil}(h)|}$.*

$$\operatorname{Cut} = \begin{cases} \{(\pi, 0)\}, & I_1 = I_2, \\ \{(c, 0) \mid c \geq \pi I_2/I_1\}, & I_1 < I_2, \end{cases} \quad t_{\operatorname{cut}}(h) = \begin{cases} \frac{2\pi I_2}{|h|}, & \operatorname{Kil}(h) < 0, \\ +\infty, & \operatorname{Kil}(h) \geq 0. \end{cases}$$

References

- [1] Lokutsievskiy L.V., Podobryaev A.V. *Existence Theorem for Sub-Lorentzian Problems*. Journal of Dynamical and Control Systems. 30, 10 (2024).
- [2] Rakotoniaina C. *Cut locus of the B-shperes*. Ann. Glob. Anal. Geom. 3, 3 (1985), 313–327.

QUALITATIVE PROPERTIES OF SINGULAR SOLUTIONS TO SOME SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS OF EMDEN-FOWLER TYPE

PROKOPENKO O.D.

Lomonosov Moscow State University, Russia
olga.prokopenko.2011@mail.ru

For the generalized Emden-Fowler type differential equation

$$y'' = x^k |y|^n |y'|^m \operatorname{sgn}(yy') \tag{1}$$

asymptotic properties of singular μ -solutions as $x \rightarrow +0$ and solutions as $x \rightarrow +\infty$ are investigated under various relationships between parameters k, m, n .

The concept of a μ -solution was introduced by Astashova I. in [1].

Definition 1. A solution $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ with $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ to any ordinary differential equation is called a μ -solution if the following conditions hold:

- 1) the equation has no other solution equal to y on some subinterval of (a, b) ;
- 2) either there is no solution defined on another interval containing (a, b) and equal to y on (a, b) , or there exist at least two such solutions not equal to each other at points arbitrary close to the boundary of (a, b) .

For μ -solutions of equation (1) defined on $(0; +\infty)$ were obtained the following results.

Theorem 1. *All μ -solutions of equation (1) defined on $(0; +\infty)$ for $n > 0$ can behave as follows:*

- a) if $0 < m < 1$, then they are either strictly monotonic functions or identically zero.
- b) if $m \geq 1$, then they are either constants or strictly monotonic functions.

Theorem 2. *Any μ -solution of equation (1) defined on $(0; +\infty)$ exhibits the following behavior near its boundaries:*

- 1) near the left boundary of the domain:
 - a) $y \rightarrow -\infty$, $y' \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow +0$,
 - b) $y \rightarrow M < 0$, $-\infty < M$, $y' \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow +0$,
- 2) near the right boundary of the domain:
 - a) $y \rightarrow +\infty$, $y' \rightarrow +\infty$ as $x \rightarrow +\infty$,
 - b) $y \rightarrow -0$ as $x \rightarrow +\infty$,
 - c) $y \rightarrow M < 0$ as $x \rightarrow +\infty$.

Theorem 3. *If $n > 0$, $m > 0$, $n + m - 1 > 0$ and $k - m + 2 > 0$, then all increasing negative singular μ -solutions of equation (1) defined on $(0; +\infty)$ have the following asymptotic form:*

$$y = -Cx^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow +0,$$

where

$$\alpha = \frac{k - m + 2}{m + n - 1}, \quad C = \left((\alpha)^{1-m}(\alpha + 1) \right)^{\frac{1}{m+n-1}}.$$

Remark 1. Conditions of Theorem 3 were obtained using uniqueness theorem from [2] ($n > 0$, $m > 0$) and $\alpha > 0$. We may require that $n > 0$,

$m > 0$, $n + m - 1 < 0$ and $k - m + 2 < 0$ to fulfill the conditions of the uniqueness theorem and the condition $\alpha > 0$. But such a system has no solutions.

The results of [3-5] were used to prove the above-mentioned theorems.

References

- [1] Astashova I. *On asymptotic classification of solutions to fourth-order differential equations with singular power nonlinearity*. Mathematical Modeling and Analysis, 2016, V. 21, No. 4, 502-521.
- [2] Astashova I. *Uniqueness of Solutions to Second Order Emden-Fowler Type Equations*. Problemy matematicheskogo analiza, 2021, Vol. 109, 11-16. In Russian
- [3] Korchemkina T. *On the Behavior of Solutions to a Second-Order Differential Equation with General Power-Law Nonlinearity*. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 2018, Vol. 73, 101-111.
- [4] Korchemkina T. *Asymptotic Behavior of Unbounded Solutions to Second-Order Differential Equations with General Nonlinearities*. Trudy seminara im. I.G. Petrovskogo, 2019, Issue 32, 239-256. In Russian
- [5] Astashova I. *Uniform Estimates for Positive Solutions of Quasilinear Differential Equations*. Izvestiya RAN, 2008, Vol. 72, No. 6, 103-124. In Russian

ORDER DETERMINATION INVERSE PROBLEMS FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATIONS WITH DZHRBASHYAN–NERSESYAN OPERATOR

PSKHU A.V.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Russia
pskhu@list.ru

Consider the equation

$$\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} - \Delta_x \right) u(x, y) = 0 \quad (1)$$

where $\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} = D_{0y}^{\{\alpha, \beta\}}$ is the Dzhrbashyan–Nersesyan fractional differentiation operator of order $\sigma = \alpha + \beta - 1$, associated with the ordered pair $\{\alpha, \beta\}$, $\alpha, \beta \in (0, 1]$; $\sigma \in (0, 1]$; Δ_x is the Laplace operator with respect to $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

The Dzhrbashyan–Nersesyan operator [1], associated with the sequence $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ ($\gamma_k \in (0, 1]$, $k = 1, \dots, m$) of order $\delta = \sum_{k=0}^m \gamma_k - 1$ is defined by

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} := D_{0y}^{\gamma_m-1} D_{0y}^{\gamma_{m-1}} \dots D_{0y}^{\gamma_1} D_{0y}^{\gamma_0},$$

where D_{0y}^ξ is the Riemann–Liouville fractional derivative (integral) of order ξ with the origin at $y = 0$ [2].

In this work we study inverse problems for the equation (1), in which the pair $\{\alpha, \beta\}$ is unknown and must be determined.

Inverse problems in which the order of fractional differentiation is unknown and must be found have shown great interest in recent years. A detailed overview can be found in [3].

As is known, the Dzhrbashyan–Nersesyan operator covers a wide class of fractional differential operators. For example, the most frequently encountered forms of fractional differentiation, the Riemann–Liouville derivative and the Gerasimov–Caputo derivative, are special cases of this operator:

$$D_{0y}^{\{\zeta-m+1, 1, \dots, 1\}} = D_{0y}^\zeta \quad \text{and} \quad D_{0y}^{\{1, \dots, 1, \zeta-m+1\}} = \partial_{0y}^\zeta,$$

where ∂_{0y}^ζ is the Gerasimov–Caputo derivative; $\zeta \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$.

Thus, by finding the pair $\{\alpha, \beta\}$ we determine both the order and the form of fractional differentiation in the equation (1).

The overdetermination conditions proposed here combine spatially oriented conditions using information about the sought solution at fixed times and asymptotic conditions using the behavior of the solution at large values of time. The conditions are based on integral identities relating solutions of the Cauchy problem for the equation (1) to solutions of the Helmholtz equation and entire harmonic functions.

In particular, it is proved that

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x) u(x, y) dx = y^{\alpha-1} E_{\sigma, \alpha}(\lambda y^\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \tau(x) dx, \quad (2)$$

where $u(x, y)$ is a solution of the equation (1) that satisfies the initial condition

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n);$$

$v(x)$ is a solution of the Helmholtz equation

$$\Delta_x v(x) = \lambda v(x)$$

in $\mathbb{R}^n$; and $E_{\sigma,\alpha}(z)$ is the Mittag-Leffler function. The identity (2) is valid for any $y > 0$ under certain assumptions regarding the growth of $\tau(x)$ and $v(x)$ for large values of $|x|$.

In addition, a special case of (2) is the equality

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x) u(x, y) dx = \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) \tau(x) dx,$$

where $w(x)$ is an entire harmonic function.

References

- [1] Dzhrbashyan M.M., Nersesyan A.B. *Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order*. Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat., 3 (1968), 3–29.
- [2] Nakhushev A.M. *Fractional calculus and its application*. Fizmatlit, 2003.
- [3] Alimov Sh., Ashurov R. *On determining the fractional exponent of the subdiffusion equation*. Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 33 (2025), 171–181.

EXISTENCE OF NON-RADIAL EXTREMAL FUNCTIONS FOR HARDY–SOBOLEV INEQUALITIES IN NON-CONVEX CONES

RASTEGAEV N. V.

St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy
of Sciences, 27 Fontanka, St. Petersburg, Russia
rastmusician@gmail.com

The symmetry breaking is obtained for Neumann problems for equations with p -Laplacian generated by the Hardy–Sobolev inequality:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{u^{q-1}}{|x|^{(1-\sigma)q}} & \text{in } \Sigma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial \Sigma_D, \\ u > 0 & \text{in } \Sigma_D. \end{cases}$$

Here $1 < p < n$, $n \geq 3$, $0 < \sigma \leq 1$, $q = p_\sigma^* = \frac{np}{n-\sigma p}$, $D \subset \mathbb{S}^{n-1}$ and

$$\Sigma_D = \{xt : x \in D, t \in (0, +\infty)\} \subset \mathbb{R}^n$$

is a non-convex cone. Such problems have obvious radial solutions — Talenti–Bliss functions of $|x|$. However, under a certain restriction on the first Neumann eigenvalue $\lambda_1(D)$ of the Beltrami–Laplace operator on D :

$$\lambda_1(D) < (1 - \alpha)(n - 1 - \alpha(p - 1)), \quad \alpha = (1 - \sigma)\frac{q}{p},$$

we prove this radial solution cannot be the extremal function, therefore minimizer must be non-radial.

In the case $p = 2$, $\sigma = 1$ this problem was investigated in [1].

This research was supported by the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation “BASIS”.

References

- [1] Ciraolo, G., Pacella, F. and Polvara, C. C., 2024. Symmetry breaking and instability for semilinear elliptic equations in spherical sectors and cones. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 187, pp. 138-170.

ON THE PROPERTIES OF THE SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR THE VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE VISCOELASTIC ROD OSCILLATIONS

RAUTIAN N.A.

Lomonosov Moscow State University, Russia
nrautian@mail.ru

We study the Cauchy problem for a one-dimensional Volterra integro-differential equation, the main part of which is a one-dimensional wave equation perturbed by an integral operator of the form of Volterra convolution (wave equation with memory). The kernel function of the integral operator is the sum of fractional exponential functions (Rabotnov functions) with positive coefficients. The question of the influence of the integral operator on the speed of propagation of disturbances in the Cauchy problem for a wave equation with memory is investigated. The Volterra integro-differential equation being studied

describes the vibrations of a viscoelastic rod, the process of heat propagation in media with memory (the Gurtin-Pipkin equation) and has a number of other important applications.

The presented results are a continuation and development of research published in the works [1], [2].

References

- [1] Rautian N.A. *On the properties of semigroups generated by Volterra integro-differential equations with kernels representable by Stieltjes integrals*. Differential Equations, 57:9 (2021), 1231-1248.
- [2] Rautian N.A. *Representations of solutions for Volterra integro-differential equations in Hilbert spaces*. Doklady Mathematics, 109:3 (2024), 262-267.

EXISTENCE OF A SOLUTION TO AN ABSTRACT COUPLED SYSTEM ARISING IN THE DYNAMICS OF COMPLEX FLUIDS

ROMANOV M.S.

Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.
Lomonosov Moscow State University, Russia
mcliz@mail.ru

We consider the initial value problem for the abstract system of two coupled equations

$$u_t + A(u) = \mathcal{L}_{(u,v)} v + f(u, v), \quad u(0) = u_0; \quad (1)$$

$$v_t + B(v) = -\mathcal{L}_{(u,v)}^* \tilde{A}u + g(u, v), \quad v(0) = v_0, \quad (2)$$

where u and v are unknown functions.

This type of problem is very common in the theory of complex fluids, especially in the theory of liquid crystals.

We assume that A

- (1) Operator A is a subdifferential of a convex lower semicontinuous functional Φ defined on the Hilbert space H ;
- (2) For any $C \in \mathbb{R}$ the set $\{u : \Phi(u) \leq C\}$ is compact in H and there exists such reflexive Banach space $\mathcal{U} \subset L_2(0, T; H)$ that for all $r > 0$

$$\sup_{\Psi_1(u) < r} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}} < \infty,$$

where $\Psi_1(u) = \|u\|_{L_2(0,T;H)} + \|u_t\|_{L_2(0,T;H)} + \|A(u)\|_{L_2(0,T;H)}$.

- (3) Operator B is a monotone semicontinuous operator from the Banach space V into its dual V' , which satisfies additional conditions

$$(B(v), v) \geq c_1 \|v\|_V^p, \quad \|B(v)\|_{V'} \leq c_2 (\|v\|_V^{p-1} + 1).$$

- (4) For any fixed $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, where

$$\mathcal{V} = \{v \in L_p(0, T; V) : v_t \in L_{p'}(0, T; V')\},$$

operator $\mathcal{L}_{(u,v)}$ is a bounded linear operator from the Banach space $L_p(0, T; V)$ into the space $L_2(0, T; H)$; $\mathcal{L}_{(u,v)}^*$ is its adjoint operator.

- (5) The map $(u, v) \mapsto \mathcal{L}_{(u,v)}$ is continuous in the appropriate topology. The function $(\mathcal{L}_{(u,v)} w)(t)$ at any moment of time depends on the previous states of (u, v) and current state of w only.
- (6) Operator $\tilde{A}$ is subordinate to the operator A .
- (7) $f(u, v)$ and $g(u, v)$ are compact non-linear operators in the appropriate functional space;

Definition 1. The pair $(u, v) \in L_2(0, T; H) \times \mathcal{V}$ is a solution to the problem (1), (2) if

- $f(u, v), \tilde{A}(u) \in L_2(0, T; H)$;
- $g(u, v) \in L_{p'}(0, T; V')$;
- u is a strong solution to the problem (1) with the right hand side $\mathcal{L}_{(u,v)} v + f(u, v)$ (see [1]);
- v is a weak solution to the problem (2) with the right hand side $-\mathcal{L}_{(u,v)}^* \tilde{A}(u) + g(u, v)$ (see [2]);

Under several additional natural assumptions on the operators $A, B, \tilde{A}, \mathcal{L}_{(u,v)}, f, g$, we prove that the problem (1),(2) has a solution in sence of Definition 1. The proof is based on Brezis' and Lions' theory of monotone operators [1], [2] and Tychonoff Fixed Point theorem [3].

This research was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as a part of the program of the Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics under the agreement no 075-15-2022-28

References

- [1] H.Brézis, Operateurs monotones maximaux, 1973.
- [2] J.-L.Lions. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, 1969.
- [3] A.Granas, J.Dugundji. Fixed point theory, Springer-Verlag New York, 2003.

CAUCHY PROBLEM FOR A PARABOLIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATION WITH A SUMMABLE INITIAL FUNCTION AND A MULTIDIMENSIONAL TRANSLATION

ROSSOVSKII G. L.

RUDN University, Miklukho-Maklaya ul. 6, Moscow, 117198 Russia
MIREA - Russian Technological University, 78 Vernadsky Avenue, Moscow, 119454
Russia
grossovski@yandex.ru

Let the parameter a be real and $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ be a real vector in $\mathbb{R}^n$. Let us consider a parabolic differential-difference equation with a translation in a spatial variable in a lower term:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x) + au(x - h, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1)$$

paired with the following initial condition:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n). \quad (2)$$

And also let us define the function

$$\mathcal{E}_n(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(-|\xi|^2 + a \cos h\xi)t} \cdot \cos(x\xi - at \sin h\xi) d\xi \quad (3)$$

in a half-space $x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$.

This function can be obtained by formal application of Fourier transform to the initial equation (1). As it was shown in [1]-[2] it satisfies equation (1) in a aforementioned half-space $x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$ in a classical sense and is called a Poissonian kernel.

The solution to the stated problem (1)-(2) is constructed as a convolution of function (3) and the initial-value function (2):

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_n(x - \xi, t) \cdot u_0(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Theorem 1. *Function (4) satisfies the Cauchy problem (1)-(2) in the sense of generalized functions and satisfies equation (1) in the half-space $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ in the classical sense.*

We then proceed onto the investigating the properties and the behaviour of the obtained solution and its derivatives as $t \rightarrow \infty$.

After thoroughly investigating the function in the power of the integrand in (3) we have obtained the following sufficient condition of the uniform convergence of the integral (3) itself. This condition explicitly binds the coefficient before the lower term of the equation (1) and the value of the translation:

$$|a| \cdot |\tilde{h}|^2 \leq 2. \quad (5)$$

Theorem 2. *Let condition (5) be fulfilled. Then solution (4) of the Cauchy problem (1)-(2) converges to zero as $t \rightarrow \infty$ uniformly with respect to $x \in \mathbb{R}^n$. The rate of convergence is determined by the following estimate:*

$$|u(x, t)| \leq C \cdot \frac{\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R})}}{t^{n/2}},$$

where C is a constant.

Theorem 3. *Let condition (5) be fulfilled. Then the partial derivatives of solution (4) of the Cauchy problem (1)-(2) of an arbitrary order $m+k$ (here $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ and $m, k \in \mathbb{N}$) converge to zero as $t \rightarrow \infty$ uniformly with respect to $x \in \mathbb{R}^n$. The rate of convergence is estimated by the following inequalities:*

$$\left| \frac{\partial^{m+k} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n} \partial t^k} \right| \leq \frac{\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{(2\pi)^n} \left[C e^{-a_0 t} + \sum_{j=0}^k C_j \frac{1}{t^{(m+n+2j)/2}} \right],$$

where $C, C_j, j = 0, \dots, k$ are constant.

References

- [1] Muravnik A.B. *Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem.* J. of Mathematical Sciences (NY), 216 (2016), 345-496.
- [2] Muravnik A.B., Rossovskii G.L. *Cauchy Problem with Summable Initial-Value Functions for Parabolic Equations with Translated Potentials.* MDPI Mathematics, 12(6) (2024), 895.

LINEARIZATION METHOD AND SHARP THRESHOLDS FOR MULTIDIMENSIONAL PRESSURELESS EULER-POISSON EQUATIONS

ROZANOVA O.S.^{1,a}, TURZYNSKY M.K.^{2,b}

¹Lomonosov Moscow State University, Russia

²Russian University of Transport, Russia

^arozanova@mech.math.msu.su, ^bm13041@yandex.ru

We study a class of extended Euler-Poisson equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -k\nabla\Phi - \mu\mathbf{v} + m\mathbf{r}, \quad -\Delta\Phi = n - c, \end{aligned}$$

where the scalar functions n (density), Φ (force potential), and the vector $\mathbf{v}$ (velocity) depend on the time t and the point $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_d)$. Here $c \geq 0$ is the density background, $\mu = \operatorname{const} \geq 0$ is the friction coefficient, $m = \operatorname{const}$ is the intensity of the quadratic confinement, $k = \operatorname{const} \neq 0$. The sign of k corresponds to a repulsive (plus) or attractive (minus) force.

The history of attempts to obtain criteria of a singularity formation for the solution of the Cauchy problem to the pressureless Euler-Poisson system is quite long. The pressureless Euler-Poisson system is interesting because it contains features of real physical models, but at the same time allows an accurate analytical study of threshold phenomena in terms of initial data, which occurs extremely rarely. The nature of the solution varies considerably depending on the assumptions made about the interaction force (attractive or repulsive) and the background density. For the case of one spatial variable, the question about the

exact identification of the initial data corresponding to a globally smooth solution is almost completely solved in [1]. However, the transfer of the results to the case of radially symmetric solutions turned out to be very difficult.

This work is inspired by the possibility of obtaining the criterion for a singularity formation in terms of initial data in the repulsive case in the exceptional spatial dimension 4 [2]. The question arose as to what other classes of systems this method could be extended to. We show that the success in obtaining a criterion in terms of the initial data is related to the possibility of obtaining a first integral of some auxiliary system. In the multidimensional case, the criteria turn out to be quite cumbersome, since they involve not only derivatives of the initial data, but also the data themselves. Therefore, the space of initial data sets corresponding to a globally smooth solution is four-dimensional.

At the same time, such a criterion in terms of the existence of a zero of a particular solution of some linear homogeneous differential equation can be obtained for a wider class of systems. Although it does not give explicit conditions on the initial data under which the solution preserves global smoothness, it can be simply implemented numerically and allows the possibility of checking any initial data.

We are also substantially interested in the connection with the theory of linear differential equations, the results of which can be applied to the new area.

We show that the question about the criterion of a singularity formation for radially symmetric solutions to the Cauchy problem for a fairly wide class of equations related to the pressureless Euler-Poisson equations can be reduced to the study of solutions to a linear homogeneous ordinary differential equation. In some cases, such a criterion can be obtained in terms of the initial data. In the remaining cases, it is possible to construct a simple numerical procedure, on the basis of which the question about preserving smoothness for any set of initial data can be solved.

This research was supported by Russian Science Foundation, grant 23-11-00056

References

- [1] Engelberg S., Liu H., Tadmor E., *Critical thresholds in Euler-Poisson equations*. Indiana Univ. Math. J., 50(2001), 109-157.
- [2] Rozanova O.S., *Criterion of singularity formation for radial solutions of the pressureless Euler-Poisson equations in exceptional dimension*, J.Math.Anal.Appl., 548 (2025), 129394 .

ON THE HIERARCHY OF SINGULARITIES IN ISOBARIC MEDIA IN THE CASE OF TWO AND THREE SPATIAL VARIABLES

RYKOV YU.G.

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Russia
yu-rykov@yandex.ru

In this talk, we will discuss the process of shock waves propagation in three-dimensional isobaric media. The two-dimensional case will be considered as a special case. The equations of motion for such media can be derived from the gas dynamic equations by setting the pressure to zero, so the system of isobaric media is often referred to as a pressureless gas system. It is sufficient to present this system in a form that does not include the energy conservation equation. Let $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$, $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Then, then the three-dimensional system of equations for the pressureless gas is as follows:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \varrho \mathbf{u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = 0 \quad , \quad (1)$$

where $\varrho > 0$ is the density of matter, $\mathbf{u} \equiv (u, v, w)$ is the velocity vector, and $\otimes$ denotes the tensor product.

The main feature that makes (1) a nontrivial system is the occurrence of delta singularities in the density. Furthermore, as shown in [1] and [2] for two-dimensional case, there is a hierarchy of such strong singularities that occur on manifolds with different dimensions. Here, we demonstrate the possible structure of singularities' hierarchy in three-dimensional space. In this case, the two-dimensional hierarchy is a special case of the three-dimensional one.

In three-dimensional space, the hierarchy consists of three types of singularities for density: delta functions on surfaces, delta functions on

curves, and delta functions at points. In this talk, we will only consider the interaction of singular surfaces, which leads to the creation of singular curve. This type of interaction is not possible in two-dimensional space, as there is no singular manifold of codimension between the minimum and maximum.

So, let us consider $\mathbb{R}^3$ and two evolving C^1 surfaces Δ_1, Δ_2 , which intersect along the C^1 curve Γ . Let also $\mathbf{x} = \mathbf{Q}_i(t, o_1, o_2)$, $i = 1, 2$, be the parametric representation of Δ_i and $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, l)$ be the parametric representation of Γ . Consider the generalized solution to (1), which is understood in sense of measures, that has delta singularities of density on Δ_i and Γ . Then we have (equations for Δ_i are also valid in 2D case):

Theorem 1. *Let P_1^s, P_2^s and P^c be the densities on Δ_1, Δ_2 and Γ . Then the Rankine-Hugoniot conditions can be expressed as follows, $i = 1, 2$:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i^s}{\partial t} &= ([\varrho] \mathbf{U}_i^s - [\varrho \mathbf{u}]) \mathbf{N}_i; \quad \frac{\partial(P_i^s \mathbf{U}_i^s)}{\partial t} = (\mathbf{U}_i^s \otimes [\varrho \mathbf{u}] - [\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}]) \mathbf{N}_i \\ \frac{\partial P^c}{\partial t} + P_2^s D_2 - P_1^s D_1 &= 0; \quad \frac{\partial(P^c \mathbf{U}^c)}{\partial t} + P_2^s \mathbf{U}_2^s D_2 - P_1^s \mathbf{U}_1^s D_1 = 0 \quad (2) \\ D_i \mathbf{N}_i &\equiv \frac{\partial(o_1, o_2)_i}{\partial(t, l)} \mathbf{N}_i = (\mathbf{U}^c - \mathbf{U}_i^s) \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial l}, \end{aligned}$$

where $\mathbf{U}_i^s \equiv \partial \mathbf{Q}_i / \partial t$, $\mathbf{U}^c \equiv \partial \mathbf{X} / \partial t$, $\mathbf{N}_i$ is the projection of Δ_i positive normal onto spatial coordinates $\mathbf{x}$, the sign $\times$ denotes the usual vector product, and for any value f we denote $[f] \equiv f^+ - f^-$.

Theorem 2. *Assume $P_2^s = 0$ and $P_1^s, \mathbf{U}_1^s$ are constants. Then the subsystem of equations from (2)*

$$\frac{\partial P^c}{\partial t} + P_2^s D_2 - P_1^s D_1 = 0; \quad \frac{\partial(P^c \mathbf{U}^c)}{\partial t} + P_2^s \mathbf{U}_2^s D_2 - P_1^s \mathbf{U}_1^s D_1 = 0 \quad (3)$$

admits a full set of first integrals.

The conditions of Theorem 2 can be understood within the following hypothetical scenario. Let's imagine an interaction between two surfaces with a singular density, resulting in a curve Γ that always remains on the boundary of one of the surfaces, collecting matter only from the other surface. In this case, (3) becomes integrable and provides a description of various regimes of mass concentration along the curve in 3D space.

References

- [1] Aptekarev A. I., Rykov Yu. G. *Emergence of a hierarchy of singularities in zero-pressure media. Two-dimensional case.* Math. Notes, 112:4 (2022), 495-504.
- [2] Rykov Yu. G. *On the evolution of the hierarchy of shock waves in a two-dimensional isobaric medium.* Izvestiya: Mathematics, 88:2 (2024), 284-312.

SUB-RIEMANNIAN GEODESICS ON THE HEISENBERG 3D NIL-MANIFOLD

SACHKOV YU.^{1,a}, GLUTSYUK A.^{2,3,b}

¹Program Systems Institute, Pereslavl-Zalessky, Russia

²UMPA, ENS de Lyon (UMR 5669 du CNRS), France

³HSE University, Moscow, Russia

^ayusachkov@gmail.com, ^baglutsyu@ens-lyon.fr

We study the projection of the left-invariant sub-Riemannian structure on the 3D Heisenberg group G to the Heisenberg 3D nil-manifold M — the compact homogeneous space of G by the discrete Heisenberg group.

First we describe dynamical properties of the geodesic flow for M : periodic and dense orbits, a dynamical characterization of the normal Hamiltonian flow of Pontryagin maximum principle and its integrability properties. We show that it is Liouville integrable on a nonzero level hypersurface Σ of the Hamiltonian outside appropriate smaller proper hypersurface in Σ and has no nontrivial analytic integrals on all of Σ . Then we obtain sharp twoside bounds of sub-Riemannian balls and distance in G , and on this basis we estimate the cut time for sub-Riemannian geodesics in M .

References

- [1] Glutsyuk A. A., Sachkov Yu. L. *Sub-Riemannian geodesics on the 3-dimensional Heisenberg nilmanifold*, Russian Math. Surveys 80:1 144–146
- [2] Glutsyuk A. and Sachkov Yu., *Sub-Riemannian geodesics on the 3-dimensional Heisenberg nilmanifold*, 2024, 49 pp., arXiv: 2406.16065.

DYNAMIC MODEL OF A GENE NETWORK

SADYRBAEV F.^{1,a}, SENGILEYEV V.

It is well known [1] that activatory and inhibitory populations of neurons interact accordingly to the two-dimensional system of ordinary differential equations

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{1 + e^{-\mu(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 - \theta_1)}} - v_1x_1, \\ x'_2 = \frac{1}{1 + e^{-\mu(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 - \theta_2)}} - v_2x_2. \end{cases} \quad (1)$$

This system allows for different behaviors, which are dependent on the coefficient matrix

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

System (1) has at least one critical point, but may have up to nine of them. It can have a stable limit cycle.

More general three-dimensional system

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{1 + e^{-\mu_1(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + w_{13}x_3 - \theta_1)}} - v_1x_1, \\ x'_2 = \frac{1}{1 + e^{-\mu_2(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + w_{23}x_3 - \theta_2)}} - v_2x_2, \\ x'_3 = \frac{1}{1 + e^{-\mu_3(w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + w_{33}x_3 - \theta_3)}} - v_3x_3 \end{cases} \quad (3)$$

can be interpreted as a model of simple three element network. Such systems arise when modeling neuronal and genetic network. For the second case, the variables $x_i(t)$ are interpreted as protein expressions of the respective gene. The combined effect of these protein expressions form various reactions in a cell as responses to external influences and govern substantial processes inside.

Due to the additional dimensionality the system (1) can have attractors in the form of stable equilibria, stable periodic solutions, and attractors of chaotic nature ([2], [3], [4]).

In our talk we continue considering of systems modeling networks with variable interactions.

For instance, the system

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{1 + e^{-4(x_1 - x_3 - \theta_1)}} - x_1, \\ x_2' = \frac{1}{1 + e^{-4(-x_1 + x_2 - \theta_2)}} - x_2, \\ x_3' = \frac{1}{1 + e^{-4(-x_2 + x_3 - \theta_3)}} - x_3 \end{cases} \quad (4)$$

has a three dimensional stable limit cycle. The corresponding matrix W

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

means that all elements activate themselves, but are inhibited x_1 by x_3 , x_2 by x_1 and x_3 by x_2 . What is the character of relations changes in time? This situation is considered for some cases (also in [5]).

Set W matrix to W

$$W = \begin{pmatrix} 1 + m \sin nt & 0 & -(1 + p \sin qt) \\ -(1 + p \sin qt) & 1 + m \sin nt & 0 \\ 0 & -(1 + p \sin qt) & 1 + m \sin nt \end{pmatrix}. \quad (6)$$

More examples of this kind are considered.

References

- [1] Wilson HR, Cowan JD. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophys J.*, vol 12 (1), 1972, pp. 1-24.
- [2] Kozlovska, O., Sadyrbaev, F. In Search of Chaos in Genetic Systems. *Chaos Theory and Applications*, 2024.
- [3] Sadyrbaev, F., Ogorelova, D. Comparative Analysis of Models of Genetic and Neuronal Networks. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2024.
- [4] Sadyrbaev, F., Sengileyev, V., Silvans, A. On Coexistence of Inhibition and Activation in Genetic Regulatory Networks. *AIP Conf. Proc.* 2849, 120004 (2023).
- [5] Sadyrbaev, F., Sengileyev, V. Networks with Periodic Interactions. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, 2025.

DYNAMICS OF HIGHER-ORDER VECTOR ROGUE WAVES IN VARIABLE-COEFFICIENT COUPLED

NONLINEAR SCHROEDINGER MODEL WITH FOUR-WAVE MIXING

SAKKARAVARTHI K.^{1,2,a}, MANIKANDAN K.^{3,4}, SUDHIR SINGH⁵

¹Department of Physics, Pachaiyappas College for Men, Kanchipuram – 631501,
Tamil Nadu, India

²Young Scientist Training Program, Asia-Pacific Center for Theoretical Physics
(APCTP), POSTECH Campus, Pohang – 37673, South Korea

³Center for Nonlinear and Complex Networks, SRM TRP Engineering College,
Tiruchirappalli-621105, Tamil Nadu, India

⁴Center for Research, Easwari Engineering College, Chennai - 600089, Tamil Nadu,
India

⁵Department of Mathematics, School of Sciences, GITAM (Deemed to be
University), Bengaluru-561203, India

^aksakkaravarthi@gmail.com

In the present work, we have focused on a systematic analysis of higher-order vector rogue wave dynamics in inhomogeneous optical media, which we execute by exploring the following variable-coefficient general coupled nonlinear Schroedinger model with four-wave mixing effects:

$$i \frac{\partial p_j}{\partial z} + \frac{\delta(z)}{2} \frac{\partial^2 p_j}{\partial t^2} + \sigma(z) (a|p_1|^2 + bp_1 p_2^* + b^* p_1^* p_2 + c|p_2|^2) p_j + (\Omega_1(z)t + \Omega_2(z)t^2 + i\Omega_3(z))p_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

where $p_j(z, t)$ are the two complex envelope optical modes, z denotes the propagation direction, and t represents transverse coordinate. Here, $\delta(z)$ and $\sigma(z)$ are varying dispersion and nonlinearity coefficients along the propagation direction, respectively. The functions $\Omega_1(z)$, $\Omega_2(z)$, and $\Omega_3(z)$ indicate the external linear potential, the harmonic potential, and the gain/loss effect, respectively.

We have constructed explicit higher-order localized rogue wave solutions through a non-trivial triple-stage methodology involving a linear superposition formula, generalized similarity, and Darboux transformations. The obtained solution exhibits bright, dark, and gray-type localized structures, revealing diverse patterns on constant and periodic backgrounds. We have classified the obtained rogue waves into singlet, doublet, triplet, quartet, and sextet rogue patterns, admitting dot, line, triangular, rhombus, and pentagon structures. The

inhomogeneity in the medium modulates the rogue wave characteristics, revealing various phenomena like partial suppression, amplification, splitting, trapping, and merger of localized peaks with asymmetric deformation and collapse into the background. These findings can contribute to a deeper understanding of rogue waves and other localized coherent structures across diverse inhomogeneous media.

References

- [1] Sakkaravarthi K., Manikandan K., Sudhir Singh. *Higher-Order Vector Rogue Waves in Inhomogeneous Optical Media: Insights into Variable-Coefficient Coupled Nonlinear Schroedinger Model with Four-Wave Mixing. (To be Published)*.
- [2] W. Yang, and X.P. Cheng. *Periodic solitons of generalized coupled nonlinear Schroedinger equations with variable coefficients*. Eur. Phys. J. Plus **139**, 363 (2024).

THE COMBINATORICS OF SINGULARITIES OF CAUSTICS AND FRONTS

SEDYKH V. D.

Gubkin University, Moscow, Russia
vdsedykh@gmail.com

Simple stable singularities of caustics and fronts were classified by Arnold about half a century ago. However the topology of adjacencies of these singularities has not yet been fully studied. We will talk about recent achievements in this area.

ON HOMOGENIZATION FOR THE LOCALLY PERIODIC MAXWELL SYSTEM WITH SLOWLY VARYING MAGNETIC PERMEABILITY

SENIK N. N.

St. Petersburg University, Russia
nnsenik@gmail.com

We consider the homogenization problem for the locally periodic Maxwell operator on a bounded domain in $\mathbb{R}^3$ with sufficiently smooth boundary and perfect conductivity boundary conditions. The dielectric permittivity is given by a rapidly oscillating function $\epsilon(x, x/\varepsilon)$, while the magnetic permeability, $\mu(x)$, is slowly varying. Both $\epsilon(x, y)$ and $\mu(x)$ are positive definite and bounded, smooth in x and periodic in y . The right-hand side of the Maxwell equation involving the curl of the magnetic field is assumed to be zero. We discuss operator-type approximations, as $\varepsilon \rightarrow 0$, in L_2 or H^1 for the electric and magnetic fields.

NON-LOCAL OPERATOR HOMOGENIZING THE POISSON EQUATION WITH DYNAMICAL UNILATERAL BOUNDARY CONDITIONS: ASYMMETRIC PARTICLES OF CRITICAL SIZE

SHAPOSHNIKOVA T.A.

We investigate the asymptotic behaviour of the solution of a nonlinear problem given by Poisson equation, in a domain with arbitrary shaped perforations (or particles) and with a dynamic unilateral boundary condition with a large coefficient, on the boundary of these perforations. We are specially concerned with the so-called critical case in which the relation between the coefficient in the boundary condition, the period of the basic structure, and the size of particles leads to the appearance of an unexpected new term in the effective equation. Because of the dynamic nature of the boundary condition, this «strange term» becomes now a non-local in time and nonlinear operator [1], [2].

References

- [1] Díaz J.I., Gómez-Castro D., Shaposhnikova T.A. Nonlinear Reaction-Diffusion Processes for Nanocomposites. Anomalous improved homogenization, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Berlin, 2021.
- [2] Díaz J.I., Podolskii A.V., Shaposhnikova T.A. Strange non-local operator homogenizing the Poisson equation with dynamical unilateral boundary conditions:
asymmetric particles of critical case, EJDE, Vol.2024(2024), N-03, PP.1-29.

Lomonosov Moscow State University, Russia
shaposh.tan@mail.ru

ON THE HÉNON PROBLEM FOR THE SPECTRAL NEUMANN LAPLACIAN

SHCHEGLOVA A.P.

Saint Petersburg Electrotechnical University, Russia
Saint Petersburg State University, Russia
apshcheglova@etu.ru

Let B be a unit ball in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $q > 2$, $\alpha > 0$ and $s \in (0, 1)$. We consider positive solutions of the problem

$$(-\Delta)_{\mathcal{N}}^s u + u = |x|^\alpha u^{q-1} \quad \text{in } B. \quad (1)$$

Here the spectral fractional Neumann Laplacian $(-\Delta)_{\mathcal{N}}^s$ is the self-adjoint operator restored from the quadratic form

$$[u]_{\mathcal{N}}^2 \equiv \langle (-\Delta)^s u, u \rangle := \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j^s (u, \varphi_j)_{L^2(B)}^2,$$

where μ_j and φ_j are, respectively, eigenvalues and orthonormal eigenfunctions of the Neumann Laplacian in B . It is well known that for $s \in (0, 1)$ the domain of this quadratic form coincides with the Sobolev–Slobodetskii space $H^s(B)$.

A problem (1) driven by standard Laplacian ($s = 1$) was investigated in [1]. A similar problem with p -Laplacian was considered in [2].

The energy functional

$$Q_{q,\alpha}(u) = \frac{[u]_{\mathcal{N}}^2 + \|u\|_{L^2(B)}^2}{\left(\int_B |x|^\alpha |u|^q dx\right)^{2/q}}$$

corresponding to (1) is defined on $H^s(B)$. Its minimizer, under proper normalization, is a weak (generalized) solution of the problem (1).

We show that for $q \in \left(2; \frac{2(n+\alpha)}{n-2s}\right)$ the embedding of the subspace of radial functions in $H^s(B)$ into the weighted space $L^q(B, |x|^\alpha dx)$ is compact. Therefore, the problem (1) has a positive radial solution.

Theorem 1. *Let $s > 1/2$, $q \in \left(\frac{2n-2}{n-2s}, \frac{2n}{n-2s}\right)$. There exists $\hat{\alpha}(s, q)$ such that for any $\alpha > \hat{\alpha}$ the minimizer of $Q_{q,\alpha}$ over the whole space $H^s(B)$ is not a radial function. So, the problem (1) has a nonradial positive solution.*

Theorem 2. *Let $s > 1/2$. There exists $\tilde{q}(s) > 2$ such that for any $q \in (2, \tilde{q})$ positive radial solution of (1) is a local minimizer of $Q_{q,\alpha}$ for any α sufficiently large.*

Conjecture. The statement of Theorem 2 holds for all $q \in \left(2, \frac{2n-2}{n-2s}\right]$.

References

- [1] Gazzini M., Serra E. *The Neumann problem for the Hénon equation, trace inequalities and Steklov eigenvalues.* Ann. I. H. Poincaré 25 (2008), 281–302.
- [2] Shcheglova A. *The Neumann problem for the generalized Hénon equation.* J. Math. Sci. 235 (2018), N. 3, 360–373.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF LARGE SOLUTIONS TO SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

SHISHKOV A.E.

RUDN University, Russia
aeshkv@yahoo.com

Non-negative function $u(x)$ is called a large solution of equation:

$$\Delta u = f(x, u)$$

in bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ if u satisfies the boundary condition

$$\lim_{d(x) \rightarrow 0} u(x) = \infty, \quad d(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega).$$

Firstly the existence of large solutions was proved by L. Bieberbach (1916) in the case of $N = 2$, $f = f(u) = b^2 \exp u$. J.B. Keller (1957), R. Osserman (1957) found the general necessary and sufficient condition for the existence of large solutions in terms of the growth of the function $f = f(u)$ as $u \rightarrow \infty$. Firstly the existence and uniqueness of large solutions was proved by C. Loewner and L. Nirenberg (1974) in the case of $N > 1$, $f = f(u) = u^p$, $p = \frac{N+2}{N-2}$. C. Bandle and M. Marcus (1992) gave the proof of uniqueness for general power nonlinearity $f(u) = u^p$, $p > 1$. During last decades general class of nonlinearities $f = f(x, u)$ degenerating on $\partial\Omega$: $f(x, u) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega \ \forall u > 0$ was intensively investigated by many authors. Particularly, M. Marcus and L. Veron (2003) proved the uniqueness of large solutions in the case of C^2 -smooth domain Ω under the following condition: $f(x, u) \geq c_0 d(x)^\alpha u^p \ \forall x \in \Omega$, $\forall u \geq 0$, $p > 1$, $\alpha > 0$, $c_0 = \text{const} > 0$. J. Lopez-Gomez, L. Mair, L. Veron (2020) hypothesized that the condition:

$$f(x, u) \geq c_0 \exp(-c_1 d(x)^{-\alpha}) u^p \\ \forall x \in \Omega, \ \forall u \geq 0, \ p > 1, \ 0 < \alpha < 1, \ c_1 > 0,$$

is a sharp sufficient condition for the uniqueness of large solutions.

We prove even more weak sufficient condition of uniqueness:

$$f(x, u) \geq c_0 h_\omega(d(x)) u^p \quad \forall x \in \Omega, \ p > 1,$$

where $h_\omega(s) = \exp(-s^{-1}\omega(s))$ and nondecreasing continuous function $\omega(\cdot)$ satisfies the Dini-like condition

$$\int_0^c s^{-1}\omega(s)ds < \infty, \quad \forall c > 0.$$

The dependence of uniqueness of large solutions on the geometry of the domain Ω will also be discussed.

The research is supported by RSF, project 23-11-00056

WEIGHTED NORM INEQUALITIES WITH ONE-DIMENSIONAL HARDY-TYPE OPERATORS INVOLVING SUPREMA

STEPANOV V.D.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Gubkina 8,
Moscow 119991, Russia

Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
Kim Yu Chen 65, Khabarovsk 680000, Russia
stepanov@mi-ras.ru

We obtain necessary and sufficient conditions for the boundedness in weighted Lebesgue spaces of one-dimensional Hardy-type operators involving suprema. In particular, we solve the problems from ([1], pages 326 and 331). The communication is based on the paper [2].

The research of the author was performed at Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences under financial support of Russian Science Foundation (Grant no. 24-11-00170, <https://rscf.ru/project/24-11-00170/>).

References

- [1] Frank R. L., Laptev A., Weidl T. *An improved one-dimensional Hardy inequality*. J. Math. Sci. 263 (2022), 323–342.
- [2] Stepanov V. D. *Weighted norm inequalities with one-dimensional Hardy-type operators involving suprema*. Anal. Math. Phys. 15 (2025), no. 2, Paper No. 45, 14 pp.

VISCOSITY SOLUTIONS OF ANISOTROPIC PARABOLIC EQUATIONS

TERSENOV AR.S.

Sobolev institute of mathematics, SB RAS, Novosibirsk, Russia
aterseno@math.nsc.ru

Consider degenerate parabolic equations with gradient nonlinearities of the form

$$u_t - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i(t,x)-2} u_{x_i})_{x_i} = \mathcal{B}(t, x, u, \nabla u) \quad \text{in} \quad \Omega_T = (0, T) \times \Omega. \quad (1)$$

Solutions to boundary value problems for (1) are sought in the class of weak solutions, mainly Sobolev solutions, understood in the integral sense. Note that in recent years many results have been obtained on the solvability of boundary value problems for the indicated equations in the class of viscosity solutions. Unlike Sobolev solutions, viscosity solutions are determined pointwise.

It was in this class of weak solutions that we proved the existence of a solution in the case of nonlinear gradient terms.

One of the approaches to solving boundary value problems for equations of the form (1) is the regularization method. The advantage of this approach is that the implementation of the limit procedure for viscosity solutions of regularized problems, which include, in particular, classical solutions, is possible with weaker a priori estimates for the solutions of the regularized problem.

In particular, using the apparatus of viscous solutions, we proved the existence of Lipschitz-continuous solutions in the spatial variables of the first boundary value problem for anisotropic parabolic equations with variable anisotropy exponents in the case when $\mathcal{B}(t, x, u, \nabla u)$ does not satisfy the Bernstein–Nagumo condition [1, 2].

The use of approximation methods based on regularization, which allows one to prove the classical solvability of a regularized problem, makes it possible to obtain solutions of maximum smoothness known to date.

The passage to the limit for classical solutions can also be carried out using the Minty–Browder monotonicity method to obtain a Sobolev

solution. But this approach is feasible in the case of linearity of the low order term in the gradient, since otherwise there arises a problem of the passage to the limit in the mentioned terms, which is currently insurmountable.

Note that the application of the methods of the theory of viscosity solutions makes it possible to obtain weak solutions in the viscosity sense and in the case of non-divergence type equations.

We will also consider the method of sub/super solutions, which allows us to avoid regularization and obtain solvability theorems by working directly with the original equation.

The work was carried out within the framework of the state assignment of the SB RAS Institute of Mathematics (project FWNF-2022-0008)

References

- [1] Tersenov Ar.S. On the Existence of Viscosity Solutions of Anisotropic Parabolic Equations with Time-Dependent Anisotropy Exponents, Journal of Applied and Industrial Mathematics (2023), V. 16(4), pp. 821–833
- [2] Tersenov Ar.S.. On the existence of viscosity of the evolution $p(x)$ -laplace equation with one spatial variable Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2024, V. 27 (4), pp. 1-19

STUDY AND ANALYSIS OF ONE ECOLOGICAL MODEL

TUSSUPBEKOVA E.

Moscow State University, Russia
elmira.tussupbekova@gmail.com

In this paper, we study and analyse a dynamic model for forestry biomass preservation, which is depleted due to deforestation, the growth of the industry and different climatic factors. The age structure of forest biomass is considered through the division into pre-mature (P) and mature (M) populations. Restrictions for cutting down pre-mature population are imposed on industries (I). The interaction between P, M, I variables is described by following dynamic system:

$$\begin{cases} \dot{P} = rP(1 - Pk^{-1}) - \beta P + \gamma P, \\ \dot{M} = \beta P - qEM - d_1 M, \\ \dot{I} = (\alpha_1 - \alpha_2 I(\alpha_3 + M)^{-1}) I - d_2 I, \end{cases} \quad P(0), M(0), I(0) \geq 0, \quad (1)$$

where r – the intrinsic growth rate of premature trees, k – the carrying capacity of forestry biomass, γ – new plantation, β – the transition rate from pre-mature to mature, α_1 – the maximum reduction rate of industries can attain, α_2 – maximum value for the reduced rate of industrialization, α_3^{-1} – average rate at which government provides protection to forestry population, q_1 – depletion rates of mature trees, d_1 – natural depletion rate of mature trees, d_2 – decrease in industrialization in the absence of preferred mature trees and E – the harvesting efforts [1]. Further we assume: $a \equiv r - \beta + \gamma$, $b \equiv q_1 E + d_1$, $c \equiv \alpha_1 - d_2$.

Theorem 1. *Let $a, b, c \neq 0$. Then suggested system of equations (1) has four equilibrium positions:*

- (1) $E_0 \equiv (0, 0, 0)$ (trivial case);
- (2) $E_1 \equiv (p_1, m_1, 0)$ (non-trivial case);
- (3) $E_2 \equiv (0, 0, i_2)$ (non-trivial case);
- (4) $E_3 \equiv (p_1, m_1, i_3)$ (non-trivial case),

where $p_1 \equiv \frac{ka}{r}$, $m_1 \equiv \frac{a\beta k}{br}$, $i_2 \equiv \frac{c\alpha_3}{\alpha_2}$, $i_3 \equiv \frac{c(\alpha_3 + m_0)}{\alpha_2}$. The following eight cases are realized exactly:

- 1) if $a, c < 0 < b$, then the point E_0 is a stable node, E_1 and E_2 are saddle-nodes which node parts are stable, E_3 is a saddle-node which node part is unstable;
- 2) if $a, c > 0 > b$, then the point E_0 is an unstable node, E_1 and E_2 are saddle-nodes which node parts are unstable, E_3 is a saddle-node which node part is stable;
- 3) if $a, b > 0 > c$, then the point E_1 is a stable node, E_0 and E_3 are saddle-nodes which node parts are stable, E_2 is a saddle-node which node part is unstable;
- 4) if $a, b < 0 < c$, then the point E_1 is an unstable node, E_0 and E_3 are saddle-nodes which node parts are unstable, E_2 is a saddle-node which node part is stable;
- 5) if $b, c > 0 > a$, then the point E_2 is a stable node, E_0 and E_3 are saddle-nodes which node parts are stable, E_1 is a saddle-node which node part is unstable;
- 6) if $b, c < 0 < a$, then the point E_2 is an unstable node, E_0 and E_3 are saddle-nodes which node parts are unstable, E_1 is a saddle-node which node part is stable;

7) if $a, b, c > 0$, then the point E_3 is a stable node, E_1 and E_2 are saddle-nodes which node parts are stable, E_0 is a saddle-node which node part is unstable;

8) if $a, b, c < 0$, then the point E_3 is an unstable node, E_1 and E_2 are saddle-nodes which node parts are unstable, E_0 is a saddle-node which node part is stable.

The practical interest for applications of this theorem is represented by cases 4) and 7), as the posed problem has a physical meaning. The work revealed the conditions under which the equilibrium positions represented a stable node, an unstable node, a stable saddle-node, and an unstable saddle-node [2]. Solutions of equations were expressed in terms of elementary functions and their integrals. Phase portraits were constructed by PhaPL web application. Phase trajectories were built by using the following python libraries: *matplotlib.pyplot*, *mpl_toolkits.mplot3d*, *scipy.integrate* [3].

References

- [1] Chaudhary M., Dhar J., Misra O. *A mathematical model for the conservation of forestry biomass with an alternative resource for industrialization: a modified Leslie Gower interaction*. Modeling Earth Systems and Environment, (2015), v. 1, 1-10.
- [2] Astashova I. V. *On Asymptotic Classification of Solutions to Nonlinear Regular and Singular Third- and Fourth-Order Differential Equations with Power Nonlinearity*. Differential and Difference Equations with Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Springer International Publishing, 194 (2016), 191-204.
- [3] Cherepovets A. A. *PhaPl web application for automatic building and research of phase portraits on plane* Vestnik of Samara University, Natural Science Series, 24.3 (2018), 41-52.

SPHERICAL SPLINE SOLUTIONS OF AN INHOMOGENEOUS BIHARMONIC EQUATION

VASKEVICH V. L.

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, 630090 Russia
Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia
v.vaskevich@g.nsu.ru

An inhomogeneous biharmonic equation is considered on a unit sphere of three-dimensional space. The solution of this equation belonging to the spherical Sobolev space is approximated by a sequence of solutions of the same equation, but with special right-hand sides, which are linear combinations of shifts of the Dirac delta function. It is proved that, for given nodes on the sphere that determine shifts, there exist special solutions of the equation: spherical biharmonic splines, and the weights corresponding to each of them are solutions of the accompanying nondegenerate system of linear algebraic equations. A relation is established between the quality of approximation of the solution of the differential problem by spherical biharmonic splines and the problem of the convergence rate of optimal weighted spherical cubature formulas.

This work was carried out as part of a state assignment for the Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, project no. FWNF-2022-0008.

References

- [1] Vaskevich V.L. Spherical Spline Solutions of an Inhomogeneous Biharmonic Equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2024, Vol. 64, No. 8, pp. 1765–1774.
- [2] S. L. Sobolev and V. L. Vaskevich, The Theory of Cubature Formulas (Kluwer Academic, Dordrecht, 1997).

ON NONSINGULAR STRUCTURAL STABLE CHAOTIC 3-FLOWS OF ATTRACTOR-REPELLER TYPE

ZHUZHOMA E.

National Research University Higher School of Economics, Russia
zhuzhoma@mail.ru

We show that given any orientable closed 3-manifold M^3 admits structurally stable non-singular flow f^t whose non-wandering set $NW(f^t)$ consists of 2-dimensional expanding attractor and finitely many repelling periodic trajectories. For $M^3 = \mathbb{S}^3$, we prove that the set of repelling periodic trajectories can be an arbitrary link provided this link contains the figure eight knot.

The results obtained in collaboration with Bin Yu (School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of Intelligent Computing and Applications, Tongji University, Shanghai, CHINA) and V.S. Medvedev (National Research University Higher School of Economics, Russia).

This work was prepared within the framework of the project International academic cooperation HSE University.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА КЛАРКСОНА–КРУСКАЛА НАХОЖДЕНИЯ РЕДУКЦИЙ

АКСЕНОВ А.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия
aksenov@mech.math.msu.su

В работе [1] был предложен метод нахождения редукций уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. В этой работе для уравнения Буссинеска

$$u_{yy} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

были получены все редукции вида

$$u = U(x, y, w(z)),$$

где $z = z(x, y)$ и функция $w(z)$ является решением ОДУ. Было показано, что для уравнения (1) редукции имеют следующий вид

$$u = \alpha(x, y) + \beta(x, y)w(z). \quad (2)$$

Было также показано, что существуют редукции, отличные от редукций, получаемых с помощью симметрий.

В работе [1] также были найдены редукции уравнения Бюргерса

$$u_y + uu_x = u_{xx},$$

уравнения Кортевега–де Вриза

$$u_y + uu_x = u_{xxx}$$

и модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза

$$u_y + u^2 u_x = u_{xxx}.$$

Было показано, что для этих уравнений найденные редукции совпадают с симметричными редукциями.

Как было отмечено в работе [1], редукции вида (2) допускают следующие преобразования, переводящие редукцию в редукцию

$$z' = F_1(z), \quad \beta' = F_2(z)\beta, \quad \alpha' = \alpha + F_3(z)\beta, \quad (3)$$

где $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$ – произвольные функции. Эти преобразования связаны с произволом в нахождении ОДУ на функцию $w(z)$.

В работе [1] при нахождении редукций использовались конкретные преобразования вида (3). В настоящей работе для нахождения редукций вида (2) предлагается использовать инварианты преобразований (3).

Теорема 1. *Вспомогательные функции $\mu_1 = \mu_1(x, y)$, $\mu_2 = \mu_2(x, y)$, $\mu_3 = \mu_3(x, y)$, определяемые из следующих соотношений*

$$\begin{aligned} \mu_1 z_x + z_y &= 0, \\ \mu_1 \beta_x + \beta_y + \mu_2 \beta &= 0, \\ \mu_1 \alpha_x + \alpha_y + \mu_2 \alpha + \mu_3 &= 0, \end{aligned}$$

являются инвариантами преобразований (3).

Можно показать, что нахождение редукций вида (2) сводится к решению переопределенной системы уравнений на вспомогательные функции μ_1 , μ_2 , μ_3 . Например, для уравнений Буссинеска (1) эта

система уравнений имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
2\mu_{2x} + 3\mu_{1xx} &= 0, & \mu_3 &= 6\mu_{2xx} + 4\mu_{1xxx} + 2\mu_1\mu_{1t} - 4\mu_1^2\mu_{1x}, \\
\mu_2 &= 2\mu_{1x}, & \mu_{1xx} + 4\mu_{2x} &= 0, & \mu_{2xx} &= 0, \\
8\mu_1\mu_2\mu_{1x} - 4\mu_{2xxx} + 2\mu_{3x} - 2\mu_1\mu_{2t} + 2\mu_{1t}\mu_{1x} + 4\mu_1\mu_{1x}^2 - \\
&\quad - 2\mu_{1t}\mu_2 - \mu_{1xxxx} - \mu_{2tt} &= 0, \\
4\mu_1\mu_{1x}\mu_{2x} + \mu_{3xxx} - \mu_{2tt} + 4\mu_{1x}\mu_{2t} - 2\mu_2\mu_{2t} + 4\mu_{1x}\mu_2^2 - \\
&\quad - 2\mu_{1t}\mu_{2x} - \mu_{2xxx} &= 0, \\
\mu_{3xxx} + \mu_{3tt} - 4\mu_1\mu_{1x}\mu_{3x} - 4\mu_{1x}\mu_2\mu_3 + 2\mu_{2t}\mu_3 - \\
&\quad - 4\mu_{1x}\mu_{3t} + 2\mu_{1t}\mu_{3x} &= 0.
\end{aligned}$$

Приведены примеры использования предлагаемого подхода.

Список литературы

- [1] Clarkson P.A., Kruscal M.D. *New similarity reductions of the Boussinesq equation.* Journal of Mathematical Physycs, 30 (1989), 2201–2213.

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

АЛЗАМИЛИ Х.Ф.^{1,a}, ШИШКИНА Э.Л.^{2,3,b}

¹Белгородский Государственный Национальный Исследовательский
Университет, Россия

²Воронежский Государственный Университет, Россия

³Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова, Россия

^aalzamili.khitam@mail.ru, ^bshishkina@amm.vsu.ru

В теории краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений большую роль в вопросах единственности и качественного изучения поведения решений играют теоремы о среднем значении. Рассмотрим теорему о среднем значении для сингулярного уравнения теплопроводности.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Мультииндекс $\gamma=(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, состоит из положительных фиксированных чисел $\gamma_i > 0$, $i=1, \dots, n$, $|\gamma|=\gamma_1+\dots+\gamma_n$.

Мы будем иметь дело с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя B_γ

$$(B_\nu)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\nu}{t} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\nu} \frac{\partial}{\partial t} t^\nu \frac{\partial}{\partial t}, \quad t > 0, \quad \nu > 0.$$

Область $G^+ \subset \mathbb{R}_+^n$ называется *областью Грина*, если G^+ представляет собой объединение областей $G_1^+, \dots, G_m^+$ без общих внутренних точек, где каждая область $G_j^+ \subset \mathbb{R}_+^n$ такова, что каждая линия перпендикулярная плоскости $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, либо не пересекается с G_j^+ либо имеет только один общий отрезок с G_j^+ (возможно, вырождающийся в точку) вида

$$\alpha_i^j(x') \leq x_i \leq \beta_i^j(x'), \quad x'=(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

где α_i^j, β_i^j гладкие для $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$.

Теорема 1. Пусть $D^+ \subset \mathbb{R}_+^n$ — область Грина. Функция $u=u(x, t)$ такая, что $u \in C^2(D^+)$, $u_{x_i}(0, t) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $u = u(x, t)$ является решением уравнения

$$\sum_{k=1}^n (B_{\gamma_k})_{x_k} u = u_t$$

тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\int_{\partial D^+} \left(-\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}'} + u \nu_{n+1} \right) x^\gamma dS = 0. \quad (1)$$

В (1) $\vec{\nu} = (\vec{\nu}', \nu_{n+1})$ внешняя нормаль к ∂D^+ , $\vec{\nu}' = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — вектор, состоящий из первых n компонент $\vec{\nu}$, $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}'} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \nu_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \nu_n$.

Уравнение вида $\sum_{k=1}^n (B_{\gamma_k})_{x_k} u = u_t$ изучалось в [1].

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ проект № FECS-2023-0003.

Список литературы

- [1] Alzamili K., Shishkina E. *On a singular heat equation and parabolic Bessel potential*. J. Math. Sci., 280 (2024), 672-691.

КОРОТКОВОЛНОВОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ СКОРОСТИ

АЛЛИЛУЕВА А.И.^{1,a}, ШАФАРЕВИЧ А.И.^{2,b}

¹ИПМех РАН, Москва, Россия

²МГУ, Москва, Россия

^aesina_anna@list.ru, ^bshafarev@yahoo.com

Для описания распространения коротких волн в средах различной природы часто используются асимптотические решения гиперболических уравнений, выражающиеся через ВКБ-экспоненты или, при наличии фокальных точек, через канонический оператор Маслова на соответствующих лагранжевых многообразиях. Малым параметром в таких асимптотиках служит отношение длины волны к характерному масштабу изменения характеристик среды. Если среда содержит локализованные неоднородности (например, узкие подводные хребты или пикноклины в океане, слои с резко меняющейся оптической или акустической плотностью и др.), коэффициенты уравнений оказываются зависящими от (вообще говоря, другого) малого параметра, причем зависимость не регулярная — слабые пределы коэффициентов имеют особенности в точках, соответствующих указанным неоднородностям. Стандартная теория коротковолновых асимптотик в такой ситуации, вообще говоря, не работает; в частности, перестраиваются геометрические объекты, определяющие решение. В случае, когда характерный масштаб неоднородности сравним с длиной волны (т.е. соответствующие малые параметры одного порядка), асимптотические решения ряда гиперболических задач описаны в работах 1, 2; в этих работах, в частности, показано, что лагранжевы многообразия, определяющие асимптотику, в точках, задающих особенности коэффициентов, разделяются несколько связанных компонент, описывающих прошедшие и отраженные волны. Амплитуды

этих волн определяются одномерной задачей рассеяния для “эталонного” уравнения, не содержащим малого параметра; тем самым, эта вспомогательная задача не связана с теорией геометрических асимптотик.

Если масштаб локализованной неоднородности много больше длины волны, конструкция асимптотики снова меняется: геометрические объекты должны возникать и в “эталонной” задаче. В настоящем докладе разбирается первый пример такой ситуации — задача Коши для одномерного волнового уравнения, скорость в котором испытывает сглаженный скачок, причем характерная длина волны начального возмущения описывается малым параметром ε , тогда как характерная ширина скачка — параметром $\sqrt{\varepsilon}$.

Тем самым, исследуется задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{\varepsilon}}, x \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u|_{t=0} = \varphi^0(x) e^{\frac{iS_0(x)}{\varepsilon}}, \quad (1)$$

$u_t|_{t=0} = 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь функция $c(y, x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($y = \frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}}$) гладкая и строго положительная, причем $c(y, x) \rightarrow c^\pm(x)$ при $y \rightarrow \pm\infty$ быстрее любой степени y вместе со всеми производными. Последнее условие отражает локализованный характер неоднородности; мы считаем, что функции $c^\pm(x)$ также гладкие и положительные. Будем считать, что S_0, φ^0 — гладкие функции, причем φ^0 финитна, $\frac{\partial S_0}{\partial x}|_{\text{supp}\varphi^0} \neq 0$, причем начальный волновой пакет находится вне локализованной неоднородности, т.е. $x|_{\text{supp}\varphi^0} < 0$. Описано рассеяние пакета при его прохождении через точку x_0 — носитель неоднородности. Отсутствие фокальных точек позволяет написать для асимптотики простые аналитические формулы, а также вычислить коэффициент прохождения волны через неоднородность. Отраженный волновой пакет в нашем случае отсутствует.

Список литературы

- [1] Allilueva A. I. and Shafarevich A. I. *Short-Wave Asymptotic Solutions of the Wave Equation with Localized Perturbations of the Velocity*. Russ. J. Math 27 (2020), 145-154.

- [2] Allilueva A. I. and Shafarevich A. I. *Semiclassical Asymptotics and Particle-Antiparticle Interactions for the Dirac Equations with Abruptly Varying 4-Potential* Russ. J. Math 31 (2024).

ОЦЕНКА БОЯРСКОГО–МЕЙЕРСА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ p -ЛАПЛАСА СО СНОСОМ

АЛХУТОВ Ю.А.^{1,a}, ЧЕЧКИНА А.Г.^{2,3,b}

¹Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
Россия

²Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Россия

³Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского
федерального исследовательского центра РАН, Россия

^ayurij-alkhutov@yandex.ru, ^bchekina@gmail.com

В ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$ рассматривается задача Зарембы для p -Лапласиана при $2 < p < n$. Пусть $F \subset \partial D$ — замкнутое множество и $W_p^1(D, F)$ — подпространство соболевского пространства функций из $W_p^1(D)$ нулевым следом на F . Полагая $G = \partial D \setminus F$, рассмотрим задачу Зарембы

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u = l \text{ в } D, \quad u = 0 \text{ на } F, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } G, \quad (1)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ обозначает внешнюю нормальную производную функции u , компоненты вектор-функции $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ удовлетворяют условию

$$b_j(x) \in L_t(D), \quad t = \frac{np}{p(n+1) - 2n}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

а l является линейным функционалом в пространстве $(W_p^1(D, F))^*$, сопряженном к $W_p^1(D, F)$. Под решением задачи (1) понимается функция $u \in W_p^1(D, F)$, которая для всех пробных функций $\varphi \in W_p^1(D, F)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_D |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_D (\mathbf{b} \cdot \nabla u) \varphi \, dx = \int_D \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi \, dx,$$

где вектор-функция $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ с компонентами $f_i \in L_{p'}(D)$, $p' = p/(p-1)$, участвует в представлении функционала l .

Введем для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ емкость $C_q(K)$, которая при $1 < q < n$ определяется равенством

$$C_q(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^q dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Обозначив через $B_r^{x_0}$ открытый шар радиуса r с центром в точке x_0 , будем предполагать, что для произвольной точки x_0 множества F из (1) при $r \leq r_0$ справедливо неравенство

$$C_q(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{n-q}, \quad q = \frac{np}{n+p}, \quad (3)$$

где c_0 не зависит от x_0 и r . Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2) и (3). Тогда задача (1) имеет решение, а если $\mathbf{f} \in L_{p'+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, то существует положительная постоянная $\delta(n, p, \delta_0) < \delta_0$ такая, что для решений задачи (1) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{p+\delta} dx \leq C \left(\|\mathbf{b}\|_{L_t(D)}^{\frac{p}{p-2}} + \int_D |\mathbf{f}|^{p'(1+\frac{\delta}{p})} dx + 1 \right).$$

в которой константа C зависит только от n, p, δ_0 , величины c_0 из (3) и области D .

Результат получен совместно с М.Д. Сурначевым и опубликован в [1]. Работа Ю.А. Алхутова выполнена в рамках государственного задания ВлГУ (проект FZUN-2023-0004).

Список литературы

- [1] Алхутов Ю.А., Сурначев М.Д., Чечкина А.Г. / О задаче Зарембы для неоднородного уравнения p -Лапласа со сносом, Доклады РАН, Математика, Информатика, Процессы управления. 2025, Т. 521, с. 5-10.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПИКARA К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДРОБНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

АНТОНОВ Н.А.

МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва
antonovna@my.msu.ru

В работе рассматривается метод последовательных приближений Пикара для построения решения задачи Коши для дробного дифференциального уравнения с производной типа Атаньяны-Балеану [2], [3], [7]. С их помощью описываются многие физические процессы [1], [6]. Метод Пикара позволяет найти решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка, задействуя меньше вычислений, оставаясь при этом достаточно точным. Одним из таких уравнений является уравнение Риккати, имеющее большое значение при решении задач Гросса–Питаевского, Бюргерса–Кортевега-Фриза, Рамануджана и ряда других [4], [5].

Определение 1. Пусть $v \in H^1(a, b)$ и $0 < \alpha < 1$. Тогда *оператором дробного дифференцирования Атаньяны-Балеану в смысле Капуто* называется

$$(T^\alpha v)(x) = ({}^{ABC}D_{a+}^\alpha v)(x) = \frac{\beta(\alpha)}{1-\alpha} \int_{a+}^x v'(s) E_\alpha \left[\frac{-\alpha}{1-\alpha} (x-s)^\alpha \right] ds,$$

где $a < x < b$, $E_\alpha(x)$ — функция Миттаг-Леффлера, $\beta(\alpha)$ — такая нормирующая функция, что $\beta(0) = \beta(1) = 1$.

Определение 2. Пусть $v \in L^1(a, b)$. Тогда *оператором дробного интегрирования Римана-Лиувилля* называется

$$({}^{RL}I_{a+}^\alpha v)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a+}^x v(s)(x-s)^{\alpha-1} ds.$$

Определение 3. Пусть $v \in L^1(a, b)$. Тогда *оператором дробного интегрирования Атаньяны-Балеану* называется

$$({}^{AB}I_{a+}^\alpha v)(x) = \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} v(x) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} {}^{RL}I_{a+}^\alpha v(x).$$

Для $v \in H^1(0, 1)$ рассмотрим задачу Коши:

$$T^\alpha v(x) = g(x, v(x)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < x < 1, \quad v(0) = \mu. \quad (1)$$

Применив оператор ${}^{AB}I_{a+}^\alpha$ к левой и правой частям уравнения (1), получим

$$v(x) - \mu = {}^{AB}I_{a+}^\alpha g(x, v(x)). \quad (2)$$

Введем приближения Пикара для уравнения (2):

$$v_{m+1}(x) = \mu + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} g(x, v_m(x)) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x g(s, v_m(s))(x-s)^{\alpha-1} ds, \quad (3)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $v_0 = \mu$.

Теорема 1. *Приближения Пикара (3) можно записать в виде*

$$v_{m+1}(x, h) = \mu + (1-h)v_m(x) + \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)} g(x, v_m(x)) + hI(x), \quad (4)$$

где

$$I(x) = \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x g(s, v_m(s))(x-s)^{\alpha-1} ds,$$

и $h \in (0, +\infty)$.

Теорема 2. *Если $v \in H^1(0, 1)$ и $g(x, v)$ липшицева по v с константой $L < \frac{\Gamma(\alpha)\beta(\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)+1}$, то приближения (4) образуют фундаментальную последовательность в $H^1(0, 1)$, сходящуюся к решению задачи Коши (1) при $m \rightarrow +\infty$, причем это решение единственно.*

Список литературы

- [1] Учайкин В.В. *Метод дробных производных* // Издательство «Артишок», Ульяновск, 2008.
- [2] Al-Refai M. *On weighted Atangana-Baleanu fractional operators* // Advances in Differential Equations, No. 3, 2020.
- [3] Baleanu D, Fernandez A. *On some new properties of fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel* // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, No. 59, pp. 444–462, 2018.

- [4] Gómez J.F., Torres L., Escobar R.F. *Fractional Derivatives with Mittag-Leffler Kernel* // Studies in Systems, Decisions and Control, Volume 194, Springer Switzerland AG, 2019.
- [5] Kashkari B, Syam M. *Fractional-order Legendre operational matrix of fractional integration for solving the Riccati equation with fractional order* // Appl Math Comput, pp. 281–291, 2016.
- [6] Podlubny I. *Fractional Differential Equations* // Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, New York, 1999.
- [7] Syam M.I., Al-Refai M. *Fractional differential equations Atangana-Baleanu fractional derivative: Analysis and applications* // Chaos, Solitons & Fractals: X, 2, 2019.

ЗАДАЧА УСРЕДНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА В ОБЛАСТИ, ПЕРФОРИРОВАННОЙ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

АПАЕВ М.Р.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Россия
apayevmr@gmail.com

Постановку задачи начнем с описания области. Обозначим через Ω область в $\mathbb{R}^2$, лежащую в верхней полуплоскости, граница которой Γ является кусочно-гладкой и состоит из нескольких частей: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где Γ_4 — отрезок $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ на оси абсцисс, Γ_2 и Γ_3 принадлежат прямым $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{1}{2}$ соответственно, $\Gamma \setminus \Gamma_4$ — гладкая. Всюду далее $\varepsilon = \frac{1}{2\mathcal{N}+1}$ — малый параметр, $\mathcal{N}$ — натуральное число, $\mathcal{N} \gg 1$.

Будем также использовать следующие обозначения. Пусть G — произвольная двумерная область с гладкой границей, лежащая в круге $K = \{\xi : \xi_1^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2}) < a^2\}$, $0 < a < \frac{1}{2}$.

Обозначим

$$G_\varepsilon^j = \{x \in \Omega : \varepsilon^{-1}(x_1 - j, x_2) \in G\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad G_\varepsilon = \bigcup_j G_\varepsilon^j,$$

$\Gamma_\varepsilon = \partial G_\varepsilon$. Определим область Ω_ε как $\Omega \setminus \overline{G_\varepsilon}$

Рассматривается задача вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon, \nabla) u_\varepsilon = g(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0, \\ (\nabla, u_\varepsilon) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0, \\ \nu \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma_4, t > 0, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, t > 0, \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$, $g = g(x_1, x_2) = (g^1, g^2)$, $g_j \in L_2(\Omega)$, n — вектор внешней нормали к границе и $\nu > 0$. Также рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \Delta u_0 + (u_0, \nabla) u_0 = g(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ (\nabla, u_0) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u_0 = 0, & x \in \Gamma, t > 0, \\ u_0 = U(x), & x \in \Omega, t = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Продолжим решение задачи (1) нулем внутрь пор.

Имеет место утверждение.

Теорема 1. Пусть u_ε — решение задачи (1), u_0 — решение задачи (2). Тогда, при стремлении малого параметра ε к нулю имеем: $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ сильно в $L_2((0, T), L_2(\Omega))$.

Аналогичные результаты для параболического уравнения получены в [1].

Список литературы

- [1] Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Meidell A., Persson L.-E. *On the Friedrichs inequality in a domain perforated along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics in parabolic problems.* Rus. J. Math. Ph. 16:1 (2009), 1–16.

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С МНОГООБРАЗИЕМ ФЛАГОВ

АРТАМОНОВ Д.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
artamonov.dmitri@gmail.com

И.М. Гельфанд и соавторы ввели гипергеометрические системы, связанные с грассманианами. Эти системы, представляют из себя системы уравнений в частных производных, которым удовлетворяют интегралы от степеней линейных форм. При этом естественной областью определения этой системы является многообразие Грассмана (см. [1]).

В работе [2] при решении задачи из теории представлений (построение явной модели конечномерных неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{gl}_n$, описание базиса Гельфанда-Цетлина в ней) была введена система уравнений в частных производных, которую естественно можно назвать гипергеометрической системой на многообразии флагов (стоит отметить, что "системы на многообразии флагов" вводил и И.М. Гельфанд с соавторами, однако, их определение стоит признать неудачным).

Данная система на многообразии флагов наследует не все хорошие свойства системы на Грассманиане. Однако, некоторыми замечательными свойствами она все-таки обладает. Так, она имеет конечномерное пространство решений. При этом размерность этого пространства находится явно в комбинаторных терминах (число линейных продолжений порядка на некотором частично упорядоченном множестве).

Кроме того, используя эту систему удастся найти новые системы порождающих в идеале соотношений Плюккера.

Об эти результатах и будет рассказано в докладе.

Список литературы

- [1] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С., *Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа*. УМН, 47:4(286) (1992), 3–82.
- [2] Artamonov D.V. *A functional realization of the Gelfand–Tsetlin base*. Изв. РАН. Сер. матем., 88:5 (2024), 3–46

О ПРОСТЫХ СЕМЕЙСТВАХ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

АСТАШОВ Е.А.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

ast-ea@yandex.ru

Семейства матриц (то есть матрицы, элементами которых являются функции на пространстве параметров) естественным образом возникают в связи с различными задачами дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений, механики, и др. Соответственно, возникают задачи приведения таких семейств к нормальным формам при помощи преобразований некоторого класса.

В работе [1] рассматривается задача приведения аналитического семейства квадратных матриц к нормальной форме, имеющей вид версальной деформации жордановой нормальной формы одного из элементов семейства. Интерес представляют также задачи классификации квадратных матриц с параметрами (квадратных, симметричных либо кососимметричных) как матриц линейных отображений либо симметричных/кососимметричных билинейных форм. Подобные задачи рассматриваются в работах [2]–[5]. Среди таких матриц выделяются простые матрицы с параметрами, то есть семейства, имеющие не больше чем конечное число примыканий (не эквивалентных им семейств, которые могут быть получены из данных сколь угодно малым возмущением).

Доклад будет посвящен обзору недавних результатов в задачах о классификации аналитических семейств квадратных матриц (общего вида, а также с ограничениями типа симметрии и четности по совокупности параметров) с точностью до различных отношений эквивалентности. В частности, будут приведены необходимые условия существования простых семейств определенного вида, а также частичная классификация таких семейств. Некоторые из этих результатов можно найти в работе [6].

Список литературы

- [1] Арнольд В.И. *О матрицах, зависящих от параметров*. УМН 26:2(158) (1971), 101-114.

- [2] Haslinger G.J. *Families of Skew-symmetric Matrices (Ph. D. thesis)*. University of Liverpool, 2001.
- [3] Bruce J.W., Tari F. *On Families of Square Matrices*. Cadernos de Mathematica, 03 (2002), 217-242.
- [4] Bruce J.W. *On Families of Symmetric Matrices*. Moscow Math. J. 3 (2003), 335-360.
- [5] Bruce J.W., Goryunov V.V., Haslinger G.J. *Families of skew-symmetric matrices of even size*. arXiv.org (2022).
- [6] Abdrakhmanova N.T., Astashov E.A. *Simple germs of skew-symmetric matrix families with oddness or evenness properties*. Journal of Mathematical Sciences, 270:5 (2023), 625-639.

**ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ
НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ
В ПЛОСКИХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ С
БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ ИЗ КЛАССА
ДИНИ-ГЕЛЬДЕРА**

БАДЕРКО Е.А.^{1,2,a}, САХАРОВ С.И.^{1,2,b}

¹МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия

²Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

^abaderko.ea@andex.ru, ^bser341516@yandex.ru

Рассматриваются начально-краевые задачи для параболических по Петровскому систем второго порядка в ограниченной области Ω с негладкими боковыми границами из класса Дини-Гельдера $H^{1/2+\omega}$, на которых задаются граничные условия общего вида. Доказывается теорема об однозначной разрешимости в пространстве $C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$ поставленных задач при точных условиях на гладкость правых частей граничных условий и на гладкость боковых границ области Ω . Дается интегральное представление решений этих задач и устанавливается их принадлежность пространству $\hat{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$. Пространство $\hat{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ совпадает с пространством Гельдера $H^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$ (см. [1]) при подстановке в определение последнего $\alpha = 0$. При этом нормы в этих пространствах эквивалентны. Отдельно доказывается имеющая вспомогательный характер теорема об однозначной разрешимости в пространстве $C^{2,1}(D) \cap C^{1,0}(\overline{D})$ задачи Коши для параболических систем в полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$.

Кроме того, устанавливается принадлежность пространству $\hat{C}^{1,0}(\overline{D})$ решения этой задачи.

Список литературы

- [1] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа* Наука, М: 1967.
- [2] Камынин Л.И., Химченко Б.Н. *Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка* Сиб. матем. ж. 1975. Т. 16, № 6. С. 1172-1187.
- [3] Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. *Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости* Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198-208.
- [4] Бадерко Е.А., Сахаров С.И. *Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуграниченной области на плоскости* Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1333-1343.
- [5] Сахаров С.И. *Начально-краевые задачи для однородных параболических систем в полуграниченной плоской области и условие дополненности* Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 12. С. 1641-1653.
- [6] Сахаров С.И. *О начально-краевых задачах для параболических систем в полуграниченной плоской области с граничными условиями общего вида* Журн. вычислит. матем. и мат. физики. 2024. Т. 64. № 6. С. 1028-1041.
- [7] Бадерко Е.А., Сахаров С.И. *Об однозначной разрешимости задачи Коши в классе $C^{1,0}(\overline{D})$ для параболических систем на плоскости* Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 11. С. 1471-1483.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

БАЙДУЛОВ В.Г.^{1,a}, КНЯЗЬКОВ Д.Ю.^{1,b}, ШАМАЕВ А.С.^{1,c}

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия

^abaydulov@gmail.com, ^bknyaz@ipmnet.ru, ^csham@rambler.ru

Рассмотрим задачу моделирования распространения внутренних гравитационных волн в области, заполненной стратифицированной идеальной жидкостью. Запишем уравнение на внутренний потенциал $\psi(\mathbf{x}, t)$ в приближении Буссинеска [1, 2]:

$$\Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + N(z)^2 \Delta_{xy} \psi = f(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r}(t)$ — положение источника возмущения в момент времени t , N — частота плавуности, $\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Delta = \Delta_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. После того, как функция $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ найдена, можно рассчитать давление, вертикальное смещение, скорость жидкости [3, 4]. На границе ограниченной области Ω задано условие

$$\psi = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2)$$

в начальный момент времени

$$\psi|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) является уравнением соболевского типа [5], точные утверждения о разрешимости задачи (1)–(3) для случая $N = \text{const}$ можно найти в [6]. Ранее авторами была разработана компьютерная программа, позволяющая численно решать задачу (1)–(3) для случая, когда источник возмущения в правой части уравнения (1) определяется функцией $f(x, y, z) = \frac{BA^3}{\sqrt{\pi^3}} e^{-A^2(x^2+y^2+z^2)}$, где A , B — некоторые константы [4, 7].

Для отдельного точечного источника с массой m в неограниченной однородно стратифицированной жидкости, т.е. для $f(\mathbf{x}) = m\delta(\mathbf{x})$, $N = \text{const}$ известны асимптотики для случаев движения с постоянной скоростью горизонтально [3] или под фиксированным углом к горизонту [8]. В настоящей работе исследуется возможность использовать эти асимптотики вместо решения задачи (1)–(3), в том числе, для расчета поля скоростей от группы массовых источников, для движения с непостоянной скоростью. Показано, что на достаточно большом расстоянии от траектории движения источника возмущения и от границы области $\partial\Omega$ установившееся поле скоростей может быть рассчитано по асимптотическим формулам для точечного источника с некоторой эффективной массой m_0 .

Расчеты проводились с использованием вычислительных кластеров Центра коллективного пользования (ЦКП) ВР МСЦ НИЦ «Курчатовский институт». Авторы выражают глубокую признательность руководству и сотрудникам ЦКП.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-61-00025, <https://rscf.ru/project/24-61-00025/>.

Список литературы

- [1] Миропольский Ю.З. *Динамика внутренних гравитационных волн в океане*. Гидрометеиздат, Л: 1981.
- [2] Bulatov V.V., Vladimirov Y.V. *A general Approach to Ocean Wave Dynamics Research: Modelling, Asymptotics, Measurements*. OntoPrint, Moscow: 2019.
- [3] Voisin B. *Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Part 2. Moving point sources*. J. Fluid Mech., 261 (1994), 333–374.
- [4] Baydulov V.G., Knyazkov D., Shamaev A.S. *Motion of mass source in stratified fluid*. J. Phys.: Conf. Ser., 2224 (2022), 012038-1–8.
- [5] Демиденко Г.В., Успенский С.В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*. Научная книга, Новосибирск: 1998.
- [6] Габов С.А., Свешников А.Г. *Линейные задачи нестационарных внутренних волн*. Наука, М: 1990.
- [7] Князьков Д.Ю. *Моделирование влияния неоднородности стратификации на поле внутренних волн в океане*. Морские интеллектуальные технологии, №4(4) (2024), 91–98.
- [8] Scase M.M., Dalziel S.B. *Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid*. J. Fluid Mech., 498 (2004), 289–313.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА — МАКСВЕЛЛА

БЕЗРОДНЫХ С.И.^{1,a}, ГОРДЕЕВА Н.М.^{1,2,b}

¹Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление"

Российской академии наук, Москва, Россия

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

^asbezrodnykh@mail.ru, ^bnmgordeeva@bmstu.ru

В работе рассматривается следующая краевая задача:

$$v\mathcal{F}_x(x, v) + A\mathcal{F}(x, v) = v\mathcal{E}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds, \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_x(x) = B \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds, \quad (2)$$

$$\mathcal{F}(l, v) = \mathcal{F}(l, -v), \quad \mathcal{F}(-l, v) = \mathcal{F}(-l, -v), \quad \mathcal{E}(l) = \mathcal{E}(-l) = 1, \quad (3)$$

где функции $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ являются искомыми в полосе

$$\{x \in (-l, l), v \in (-\infty, +\infty)\}, \quad (4)$$

а функция $k(s)$ считается заданной и для нее предполагается условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(s) ds = 1; \quad (5)$$

величины $A \in \mathbb{C}$ и $B \in \mathbb{R}$ в уравнениях (1), (2) являются параметрами задачи.

Задача (1)–(5) возникает при изучении отклика слоя плазмы на внешнее электромагнитное возмущение. Уравнения (1), (2) получены путем линеаризации системы Больцмана — Максвелла. Величины $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ представляют собой возмущения функции распределения электронов и напряженности электрического поля соответственно, а переменные (x, v) имеют смысл координаты и скорости. В уравнениях (1), (2) ядро $k(s)$ представляет собой безразмерную невозмущенную функцию распределения, в качестве которой рассмотрены функция Ферми — Дирака и функция Максвелла.

Для построения общего решения системы (1), (2) применено сочетание метода расширения области (до всей плоскости (x, v)) и метода преобразования Фурье в пространствах обобщенных функций D' и Z' , см. [1]. Общее решение системы (1), (2) построено в интегральном виде с явно выписанным ядром и свободной плотностью $Q(\lambda)$.

Подстановка интегрального представления для общего решения в краевые условия (3) приводит к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши относительно $Q(\lambda)$ и растущей правой частью. Данное интегральное уравнение решено в аналитическом виде, при этом исследована зависимость его индекса от выбранного вида невозмущенной функции распределения, частоты внешнего поля и частоты столкновений в плазме. Представлена численная реализация найденного аналитического решения краевой задачи (1)–(5). Результаты изложены в работах [2], [3].

Список литературы

- [1] Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. *Обобщенные функции, вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними*. М.: Физматлит, 1959.
- [2] Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M. *Analytic Solution of the System of Integro-Differential Equations for the Plasma Model in an External Field*. Russian Journal of Mathematical Physics, 30, 4 (2023) 443-452.

- [3] Gordeeva N.M. *Calculating a Perturbation of a Plasma Layer by an Electric Field*. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 64, 3 (2024) 465-479.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

БЖЕУМИХОВА О.И.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Россия
bzhoksana@gmail.com

Работа посвящена изучению разрешимости краевых задач, в том числе нелокальных краевых задач, для линейного эллиптического уравнения второго порядка с общим инволютивным отклонением аргумента по выбранной переменной. В работе приведены результаты продолжающие исследования, начатые в работах [1]-[4].

Пусть Ω – ограниченная область из пространства R^n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ с гладкой границей Γ . В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{tt}(x, t) + \Delta u(x, t) + a(x, t)u(x, t) + b(x, t)u(x, \varphi(t)) = f(x, t), \quad (1)$$

где $a(x, t)$, $b(x, t)$ и $f(x, t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $\varphi(t)$ – заданная на отрезке $[0, T]$ инволюция, Δ – оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Задача 1. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (1) в области Q , удовлетворяющее условиям:

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

где $S = \Gamma \times (0, T)$.

Задача 2. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (1) в области Q , удовлетворяющее (2), а также условиям:

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Задача 3. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (1) в области Q , удовлетворяющее (2), а также условиям:

$$u(x, 0) = \alpha u(x, T), \quad u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где α – действительное число.

В работе для исследуемых задач методом продолжения по параметру и априорных оценок доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений [5].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Внутреннего гранта КБГУ (Договор № 8).

Список литературы

- [1] Кожанов А.И., Бжеумихова О.И. *Краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с инволюцией*. Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2021): Материалы 3-й Международной конференции. Иркутск: Иркутский государственный университет, 2021. С. 40-42.
- [2] Kozhanov A.I., Bzheumikhova O.I. *Elliptic and Parabolic Equations with Involution and Degeneration at Higher Derivatives*. Mathematics, 10(18):3325 (2022).
- [3] Бжеумихова О.И. *Краевые задачи для гиперболических уравнений с инволютивным отклонением аргумента*. Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы VII Международной научной конференции. Нальчик: Принт-центр, 2023. С. 66.
- [4] Кожанов А.И., Бжеумихова О.И. *Собственные функции и собственные числа дифференциальных уравнений с инволюцией*. Сибирский математический журнал, 65: 5(387) (2024), 953–964.
- [5] Треногин В.А. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1980.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОНТРАСТНЫМИ СОЧЕТАНИЯМИ СВОЙСТВ УСТОЙЧИВОСТИ, НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ИХ РАДИАЛЬНЫХ РАЗНОВИДНОСТЕЙ

БОНДАРЕВ А.А.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия
albondarev1998@yandex.ru

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, рассматриваем автономные системы вида

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad f(0) = 0. \quad (1)$$

Имеют место следующие

Теорема 1. Для каждого $n > 1$ существует система (1) с нулевым линейным приближением, которая одновременно:

- обладает общерадиальной асимптотической устойчивостью всех трех типов [1];
- обладает перроновской и верхнепредельной частичными крайними неустойчивостями [2];
- не обладает почти устойчивостью никакого типа [3].

Теорема 2. Для каждого $n > 1$ существует система (1) с нулевым линейным приближением, которая одновременно:

- обладает общерадиальной полной неустойчивостью всех трех типов [1];
- обладает перроновской и верхнепредельной частичными крайними неустойчивостями [2];
- не обладает почти полной неустойчивостью никакого типа [3].

Теорема 3. Для каждого $n > 1$ существует система (1) с нулевым линейным приближением, обладающая одновременно:

- общерадиальной асимптотической устойчивостью всех трех типов [1];
- перроновской и верхнепредельной частичными крайними неустойчивостями [2];
- перроновской и верхнепредельной почти асимптотическими устойчивостями [3].

Замечание 1. Распространить все три теоремы на случай размерности $n = 1$ или же добавить в формулировку третьей из них наличие у системы еще и ляпуновской почти асимптотической устойчивости не представляется возможным (см. исследования [4, теорема 2] и [3, теорема 3] соответственно).

Замечание 2. Примеры дифференциальных систем со столь контрастными наборами свойств представлены также в работах [5]–[8].

Исследование поддержано Фондом развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект № 22-8-10-3-1).

Список литературы

- [1] Сергеев И.Н. *Радиальная устойчивость и неустойчивость дифференциальной системы*. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. № 2 (2025), 63–68.
- [2] Сергеев И.Н. *Определение и свойства крайней неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы*. Дифференц. уравнения. **59**, № 6 (2023), 858–859.
- [3] Сергеев И.Н. *О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем*. Тр. семинара имени И.Г. Петровского. **33**, № 6 (2023), 353–423.
- [4] Сергеев И.Н. *Связь между устойчивостью и радиальной устойчивостью дифференциальной системы*. Дифференц. уравнения. **60**, № 11 (2024), 1572–1573.
- [5] Бондарев А.А., Сергеев И.Н. *Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств*. Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. **506** (2022), 25–29.
- [6] Бондарев А.А. *Два контрастных примера многомерных дифференциальных систем с ляпуновской крайней неустойчивостью*. Матем. заметки. **115**, № 1 (2024), 24–42.
- [7] Бондарев А.А. *Многомерная автономная дифференциальная система, обладающая единичной мерой неустойчивости, но массивной частной устойчивостью*. Дифференц. уравнения. **60**, № 8 (2024), 1011–1020.
- [8] Бондарев А.А. *Три контрпримера двумерных автономных дифференциальных систем с тотальными радиальными свойствами*. Дифференц. уравнения. **60**, № 11 (2024), 1573–1574.

РАВНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

БОНДАРЕНКО Н.П.

Саратовский государственный университет, Россия
bondarenkonp@sgu.ru

Рассмотрим краевую задачу $L = L(Q, h, H)$ для матричного уравнения Штурма-Лиувилля:

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$Y'(0) - hY(0) = 0, \quad Y'(\pi) + HY(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $Y = Y(x)$ – вектор-функция (столбец) размера m ($m \geq 1$), $Q(x)$ – комплекснозначная матрица-функция размера $(m \times m)$ с элементами из $L_2(0, \pi)$, λ – спектральный параметр, h и H – константные $(m \times m)$ -матрицы. При условиях

$$Q^*(x) = Q(x) \text{ п.в. на } (0, \pi), \quad h = h^*, \quad H = H^*,$$

задача L является самосопряженной.

Обозначим через $\Phi(x, \lambda)$ матричное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\Phi'(0, \lambda) - h\Phi(0, \lambda) = I_m, \quad \Phi'(\pi, \lambda) + H\Phi(\pi, \lambda) = 0_m,$$

где I_m и 0_m – единичная и нулевая матрицы размера $(m \times m)$. Матрица-функция $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$ называется матрицей Вейля задачи L . Ее элементы мероморфны по λ , и их полюсы совпадают с собственными значениями $\{\lambda_p\}_{p \geq 1}$ задачи L . Введем весовые матрицы

$$\alpha_p := \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_p} M(\lambda), \quad p \geq 1.$$

Обратная задача. По спектральным данным $\{\lambda_p, \alpha_p\}_{p \geq 1}$ построить $Q(x)$, h и H .

Данная обратная задача обобщает классическую задачу И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [1] по спектральной функции. Характеризация спектральных данных матричного оператора Штурма-Лиувилля (1)–(2) была получена в [2]. В данном докладе основное внимание будет уделено равномерной устойчивости обратной задачи, обобщающей результат А.М. Савчука и А.А. Шкаликова [3]

на матричный случай. Доказательство основано на методе, развитом в работе [4] для скалярного уравнения Штурма-Лиувилля.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант 24-71-10003.

Список литературы

- [1] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. *Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции*. Изв. АН СССР. Сер. матем., 15:4 (1951), 309-360.
- [2] Bondarenko N.P. *An inverse problem for the non-self-adjoint matrix Sturm-Liouville operator*. Tamkang J. Math., 50:1 (2019), 71-102.
- [3] Савчук А.М., Шкалик А.А. *Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость*. Функци. анализ и его прил., 44:4 (2010), 34-53.
- [4] Bondarenko N.P. *Uniform stability of the inverse problem for the non-self-adjoint Sturm-Liouville operator*, arXiv:2409.16175.

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ПРОБЛЕМА ЗАМЫКАНИЯ МОМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ. УРАВНЕНИЯ С ТРЕХМЕРНОЙ ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ

БОРОВСКИХ А.В.^{1,a}, ПЛАТОНОВА К.С.^{1,b}

¹Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Россия
^aaleksey.borovskikh@math.msu.ru, ^bkseniya-plat@yandex.ru

Обсуждается проблема получения уравнений сплошной среды из кинетических уравнений на основе групповых методов анализа. Основная идея состоит в том, чтобы, вычислив группу симметрий кинетического уравнения, перенести ее действие на моментные величины, найти инварианты этой группы как функций от моментных величин и, задавая инвариантные соотношения между ними, урезать и замкнуть бесконечную систему моментных уравнений, получив уже конечную систему уравнений сплошной среды.

Эта идея реализуется на простейшем одномерном кинетическом уравнении

$$f_t + cf_x + (Ff)_c = 0. \quad (1)$$

Групповой анализ уравнения (1) осуществляется в классе диффеоморфизмов пространства всех величин t, x, c, f (а в случае группы эквивалентности – еще и F), которые удовлетворяют следующим трем условиям:

- условие инвариантности при этих преобразованиях соотношений

$$dx = c dt, \quad dc = F dt, \quad (2)$$

что выражает сохранение отношения между физическими величинами (t, x, c, F) ;

- условие инвариантности семейства прямых

$$dx = dt = 0, \quad (3)$$

необходимое, чтобы сохранялся физический смысл моментных величин;

- условие инвариантности при заменах переменных величины

$$(1 + c\theta_x + F\theta_c)f(t, x, c)dxdx, \quad (4)$$

на любой поверхности $t = \theta(x, c)$, что выражает независимость количества частиц от выбора системы координат.

Установлено, что группа точечных преобразований пространства переменных (t, x, c, f, F) , оставляющих инвариантными соотношения (2), (3) и величину (4), совпадает с группой диффеоморфизмов пространства переменных (t, x) и порожденных ими преобразований остальных переменных; группа эквивалентности уравнения (1) совпадает с этой группой.

Осуществлена групповая классификация уравнений (1) в указанном классе преобразований. Для полученных групп симметрий вычислено действие этих групп на моментные величины и найдены инварианты.

В случае $F = 0$ найденный дифференциальный инвариант привел к системе $\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x = 0$, которая хорошо известна как уравнения «гидродинамики без давления». При этом каждому решению $(\rho(t, x), u(t, x))$ с начальными значениями $\rho_0(x)$ и $u_0(x)$ соответствует распределение $f(t, x, c) = \rho_0(x - ct)\delta(c - u_0(x - ct))$.

Для уравнений с трехмерными (субмаксимальными по размерности) группами симметрий исходная постановка задачи трансформировалась в следующую: нам необходимо сначала решить систему из уравнения (1) с одной стороны, и из уравнений, представляющих условие инвариантного выражения f через первые две моментные величины, а затем уже для этих f строить уравнения сплошной среды, связывающие как раз эти две моментные величины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение №075-02-2025-1530.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА В ОБЛАСТЯХ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

БРОВКИН В.В.

МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия
brovvadim2015@gmail.com

Пусть M — связное ориентированное полное риманово многообразие с краем (возможно пустым) и $\Omega \subset M$ — липшицева область. Рассмотрим задачу

$$\Delta_p u = f \quad \text{в } \Omega, \quad \left| \nabla u \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = h, \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^p dV < \infty, \quad (1)$$

где Δ_p , $p > 1$, — оператор p -Лапласа-Бельтрами, ν — вектор внешней нормали к $\partial \Omega$, а f и h — некоторые функции из $\mathcal{D}'(M)$, причем $\text{supp } f \subset \bar{\Omega}$, $\text{supp } h \subset \partial \Omega$. Решение задачи (1) будем понимать в обобщенном смысле [1].

Область Ω называется p -гиперболической, если $\text{cap}_p(\bar{\Omega}) > 0$, где $\text{cap}_p(\bar{\Omega})$ — p -емкость множества $\bar{\Omega}$ [1]. В противном случае область Ω называется p -параболической.

Пусть ω — открытое подмножество многообразия M . Для всех $l \in \mathcal{D}'(M)$ обозначим

$$N_{\omega}(l) = \sup_{\varphi} |(l, \varphi)|,$$

где $\sup$ берется по всем функциям $\varphi \in C^\infty(M)$, имеющим компактный носитель, таким, что

$$\text{supp } \varphi \cap \bar{\Omega} \subset \omega \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)} = 1,$$

где $\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}$ — полунорма в пространстве $L_p^1(\Omega)$ [2].

Будем предполагать, что $\bar{\Omega}$ допускает локально конечное покрытие

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i \quad (2)$$

кратности $k < \infty$, где $\Omega_i \subset M$ — липшицевы области с компактным замыканием такие, что $\Omega_i \cap \Omega_{i+1} \neq \emptyset$, $i \in \mathbb{N}$. Пусть при этом $\gamma : M \rightarrow (0, \infty)$ — измеримая функция, отделенная от нуля и бесконечности на каждом компактном подмножестве многообразия M , а $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ — разбиение единицы на $\bar{\Omega}$, подчиненное покрытию (2), такое, что

$$|\nabla \psi_i(x)|^p \leq \gamma(x), \quad x \in \Omega \cap \Omega_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1. Пусть Ω — p -гиперболическая область и при этом для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ с компактным носителем справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \gamma |\varphi|^p dV \leq C \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p dV, \quad (3)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ . Тогда для существования решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(f - h) < \infty. \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть Ω — p -параболическая область и при этом для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$, равной нулю на множестве $\bar{\Omega} \cap \Omega_1$, справедливо неравенство (3), где постоянная $C > 0$ не зависит от φ . Тогда для существования решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено (4) и при этом существовала последовательность функций $\eta_i \in C^\infty(M)$, имеющих компактный носитель, такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f - h, \eta_i) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|\eta_i\|_{L_p^1(\Omega)} = 0 \quad \text{и} \quad \eta_i|_K = 1, \quad i \in \mathbb{N},$$

где $K \subset \overline{\Omega}$ — некоторый компакт положительной меры.

Список литературы

- [1] Бровкин В. В., Коньков А. А. *О существовании решений второй краевой задачи для p -лапласиана на римановых многообразиях* // Матем. заметки. 2021. Т. 109. №2. С. 180–195.
- [2] Мазья В. Г. *Пространства С. Л. Соболева*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ: ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ

БУТЕРИН С. А.

Саратовский университет, Саратов, Россия
buterinsa@sgu.ru

1. Пусть $p \in [1, \infty]$, тогда как $b \in L_p(0, 1)$ и $1/b \in L_{\max\{p, q\}}(0, 1)$, где $q = p/(p-1)$. Обозначим через $L_{p,b}$ банахово пространство измеримых на $(0, 1)$ функций $f(x)$ с нормой $\|bf\|_{L_p(0,1)}$.

Рассмотрим операторно-дифференциальное выражение вида

$$\ell y := \frac{d^m}{dx^m} (By^{(n)}(x) + Cy(x)), \quad 0 < x < 1, \quad m+n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где B — линейный ограниченный обратимый оператор $L_{q,b}$ на $L_{q, \frac{1}{b}}$,

$$Cy(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} y^{(\nu)}(0)u_\nu(x), \quad u_\nu(x) \in L_{q, \frac{1}{b}}, \quad \nu = \overline{0, n-1}. \quad (2)$$

Выражение ℓy естественно рассматривать в классе $W_{q,b}^n$, состоящем из таких $y \in W_1^n[0, 1]$, для которых $y^{(n)} \in L_{q,b}$. При этом внешнюю производную в (1) можно понимать как обычным образом, так и в смысле теории распределений. *Первое* подразумевает рассмотрение только тех $y \in W_{q,b}^n$, для которых $z := By^{(n)} + Cy \in W_1^m[0, 1]$. Тогда функции $y^{[n+j]} := z^{(j)}$, $j = \overline{0, m-1}$, выполняют роль квазипроизводных. *Второе* означает, что $\ell y \in W_{q, \frac{1}{b}}^{-m}$, т.е. является функционалом

на $\overset{\circ}{W}_{p,b}^m := \{f \in W_{p,b}^m : f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0, k = \overline{0, m-1}\}$ вида

$$(\ell y, \varphi) = (-1)^m \int_0^1 z(x) \varphi^{(m)}(x) dx, \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}_{p,b}^m.$$

Тогда ℓy определено для всех $y \in W_{q,b}^n$. Оба способа понимания выражения (1) совпадут, когда $\ell y \in L(0,1)$ и, в частности, $\ell y = \lambda y$.

2. В виде (1) представимы дифференциальные выражения с коэффициентами из негативных соболевских пространств [1, 2]. Пусть

$$Bf = b^2(x)f(x) + \int_0^x K(x,t)f(t) dt. \quad (3)$$

Тогда для выражений четного порядка [1] имеем $m = n$, $p = 2$ и $|K(x,t)| \leq a(x) + a(t)$ с некоторой функцией $a \in L_{2,\frac{1}{b}}$.

Для выражений нечетного порядка [2] будем иметь $m = n + 1$, $p = 1$ и $b, b^{-1}, u_\nu \in AC[0,1]$, $\nu = 0, n-1$, а $|K(x,t)| \leq \tilde{a}(t) \in L(0,1)$.

Теорема 1. Пусть $N := m + n > 2$, $b(x) \equiv 1$ и $u_\nu(x) \in L(0,1)$ при $\nu = 0, n-1$, а $K(x,t)$ непрерывна при $0 \leq t \leq x \leq 1$, и $K(x,x) \equiv 0$.

Тогда система собственных и присоединенных функций краевой задачи для уравнения $\ell y = \lambda y$ с краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{j,k} y^{[k]}(0) = 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{j,k} y^{[k]}(1) = 0, \quad j = \overline{l+1, N},$$

где $l > N - l > 0$ и $y^{[j]} := y^{(j)}$ при $j = \overline{0, n-1}$, полна в $L_2(0,1)$.

Теорема 1 обобщает теорему Шкаликова о полноте корневых функций дифференциальных операторов с распадающимися нерегулярными краевыми условиями [3]. Однако доказательство ее основано на сведении к результатам Хромова о полноте для конечномерных возмущений интегральных вольтерровых операторов [4], при доказательстве которой также используется прием из [3], привлекающий тригонометрическую выпуклость индикатора целой функции.

Непрерывность $K(x,t)$ соответствует непрерывности первых регулярных первообразных коэффициентов дифференциальных выражений из [1, 2], записанных в виде (1)–(3), тогда как $K(x,x) \equiv 0$ означает обнуление коэффициента при $(N-1)$ -й производной.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант 24-71-10003.

Список литературы

- [1] Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями. Мат. заметки, 99(2016), 788–793.

- [2] Mirzoev K.A., Shkalikov A.A. *Ordinary differential operators of odd order with distribution coefficients*, arXiv:1912.03660 [math.SP], 2019.
- [3] Шкалик А.А. *О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями*. Функци. анализ и его прил., 10 (1976), 69-80.
- [4] Хромов А.П. *Конечномерные возмущения вольтерровых операторов*. СМФН, 10 (2004), 3-163.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРА ТИПА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ЗАМОРОЖЕННЫМ АРГУМЕНТОМ ПО СПЕКТРУ

БУТЕРИН С.А.^{1,a}, ДРАКУЛАКИ Г.^{1,b}

¹Саратовский университет, Саратов, Россия
^abuterinsa@sgu.ru, ^byum600@mail.ru

Пусть $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ – спектр краевой задачи $B(q, a, \alpha, \beta)$ вида

$$-y''(x) + q(x)y(a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \quad y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(1) = 0,$$

где $q(x)$ – комплекснозначная функция из $L_2(0, 1)$, $a \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ и $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. Рассмотрим следующую обратную задачу.

ЗАДАЧА 1. Зная $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$, а также a , α и β , построить $q(x)$.

Обозначим через $\{\lambda_k^0\}_{k \geq 1}$ спектр задачи $B(0, 0, 1, 0)$.

Теорема 1. Пусть $a = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Тогда если $\lambda_k = \lambda_k^0$ при $k > n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $q(x)$ – целая функция.

Ожидается, что аналогичное утверждение, будет справедливо для всякой тройки a , α , β , соответствующей так называемому невырожденному случаю [1], т.е. когда задача 1 однозначно разрешима.

Теорема 1 позволяет получать целые приближения произвольного потенциала $q(x)$ при помощи следующего алгоритма.

АЛГОРИТМ 1. Пусть заданы собственные значения λ_k , $k = \overline{1, n}$.

1) Вычисляем

$$a_k = (-1)^k (\lambda_k - \lambda_k^0) \prod_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^n \frac{\lambda_j - \lambda_k^0}{\lambda_j^0 - \lambda_k^0}, \quad k = \overline{1, n}.$$

2) Находим $\hat{q}_i$, $i \in \mathbb{N}$, по формулам

$$\hat{q}_i = \begin{cases} (-1)^{\frac{i}{2}} \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k (\rho_k^0)^i, & i = 2\nu, \\ (-1)^{\frac{i-1}{2}} \sum_{k=1}^n a_k (\rho_k^0)^i, & i = 2\nu + 1, \end{cases} \quad \rho_k^0 := \pi \left(k - \frac{1}{2} \right).$$

3) Наконец, строим функцию

$$q_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{q}_i}{i!} \left(x - \frac{1}{2} \right)^i.$$

Можно показать, что спектр $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k \geq 1}$ задачи $B(q_n, \frac{1}{2}, 1, 0)$ таков, что $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k$ при $k = \overline{1, n}$ и $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^0$ при $k > n$.

Как известно (см., например, [1]), имеет место асимптотика

$$\rho_k := \sqrt{\lambda_k} = \rho_k^0 + \frac{\varkappa_k}{k}, \quad \{\varkappa_k\}_{k \geq 1} \in l_2.$$

Таким образом, следующее утверждение является следствием равномерной устойчивости задачи 1 (см. [2]).

Теорема 2. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|q - q_n\|_{L_2(0,1)} \leq C \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 |\rho_k - \rho_k^0|^2},$$

где C зависит только от радиуса шара в l_2 с центром в нуле, в котором лежит последовательность $\{\varkappa_k\}_{k \geq 1}$.

Алгоритм 1 можно использовать для численного решения задачи 1. Аналогичный подход к численному решению обратной задачи, но для интегро-дифференциальных операторов предложен в [3].

Работа поддержана Российским научным фондом, грант 24-71-10003.

Список литературы

- [1] Buterin S., Kuznetsova M. *On the inverse problem for Sturm–Liouville-type operators with frozen argument: rational case*. Computational and Applied Mathematics, 39 (2020), 5.

- [2] Kuznetsova M. *Uniform stability of recovering the Sturm–Liouville-type operators with frozen argument*. Results Math., 78 (2023), 169.
- [3] Bondarenko N., Buterin S. *Numerical solution and stability of the inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 89 (2020), 105298.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ УРАВНЕНИЯ БЛАЗИУСА

ВАРИН В.П.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Россия
varin@keldysh.ru

Задача Блазиуса в математической постановке имеет вид

$$y'''(x) = -2y(x)y''(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = s, \quad x \in [0, \infty), \quad (1)$$

где константу Блазиуса s надо определить так, чтобы $y'(x) \rightarrow 1$, $x \rightarrow +\infty$. Решение этой задачи, $y(x)$, называется *функцией Блазиуса*.

Практическая значимость этой краевой задачи была исчерпана самим Блазиусом, однако в математической задаче (до недавнего времени) был ряд нерешенных проблем.

Первая очевидная проблема – это определение константы s с большой и контролируемой точностью. В Википедии эта константа приведена с 3 десятичными знаками, хотя в литературе приводится до 100 знаков. Эта вычислительная задача по сути является математической: предъявление строгой оценки погрешности (см. [1, 2]).

Здесь проблема в том, что задача (1) сингулярна, и асимптотика решения при $x \rightarrow +\infty$ (до недавнего времени, [3]) была неизвестна.

Другая весьма нетривиальная вычислительная задача – это определение точного радиуса сходимости R степенного ряда функции Блазиуса. До сих пор эта константа известна лишь с несколькими десятичными знаками (до 10), причем без какого-либо обоснования.

Эта задача является частью более общей задачи: локализации особенностей функции Блазиуса.

Показано, что решения уравнения (1) в окрестности любой особенности уравнения Блазиуса в конечной области даются *пси-рядом*

$$y(x) = \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \sum_{m=0}^n V_{n,m} A^{n-m} B^m x^{r(2m-n)}, \quad (2)$$

где $r = \sqrt{-2}$, а x заменяется на $x - x_*$ для (уже) известной или (еще) неизвестной особенности x_* . Параметры A и B зависят от конкретной особенности x_* и находятся вместе с ней, а величины $V_{n,m}$ принадлежат квадратичному полю $\mathbb{Q}(r)$ и находятся только один раз.

Доказана сходимость ряда (2) в окрестности любой особой точки уравнения (1) и показано, что ряд (2) дает локальную параметризацию функции Блазиуса в окрестности ее особенностей.

Это позволило вычислить (с большой точностью) несколько особых точек и описать поведение всех особых точек функции $y(x)$ на основном листе ее римановой поверхности. В частности, показана неинтегрируемость уравнения Блазиуса.

Список литературы

- [1] Varin V.P. *A solution of the Blasius problem*. Comp. Math. and Math. Phys. 54(6) (2014), 1025-1036.
- [2] Varin V.P. *Asymptotic Expansion of Crocco Solution and the Blasius Constant*. Comp. Math. and Math. Phys. 58(4) (2018), 517-528.
- [3] Varin V.P. *Flat Expansions and Their Applications*. Comp. Math. and Math. Phys. 55(5) (2015), 797-810.
- [4] Варин В.П. *Локализация подвижных особенностей уравнения Блазиуса*. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 20024. № 83. 23 с.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, УРАВНЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

ВАСИЛЬЕВ В.Б.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, Россия
vbv57@inbox.ru

Теория псевдодифференциальных операторов и соответствующий ей термин появились в середине 60-х годов прошлого века и сразу

же завоевали большую популярность. Во-первых, эта теория включала в себя как теорию дифференциальных операторов, так и теорию операторов типа свертки, а также уравнения с такими операторами. Во-вторых, оказалось, что такие операторы естественным образом возникают при обращении дифференциальных операторов, но, самое главное, эти операторы появляются в различных задачах математической физики.

В евклидовом пространстве и на гладком многообразии было построено символьное исчисление, которое позволило, грубо говоря, свести операторное уравнение к алгебраическому, и это дало возможность описать фредгольмовость исходного операторного уравнения в терминах его символа. Если многообразие имеет границу, существующее символьное исчисление больше не работает, и необходимо задействовать новый технический аппарат. В основе теории псевдодифференциальных операторов и уравнений в любой ситуации лежит локальный принцип, который утверждает, что для описания фредгольмовости рассматриваемого операторного уравнения должны быть описаны условия обратимости его локальных представителей. Эти локальные представители являются псевдодифференцирующими операторами в евклидовом пространстве с символом, не зависящим от пространственной переменной в специальной "канонической" области. В случае многообразия без границы такой канонической областью служило все евклидово пространство; в случае многообразия с гладкой границей уже возникают два типа канонических областей: все евклидово пространство и полупространство. Подробное изучение случая полупространства было проведено в работах М.И. Вишика и Г.И. Эскин. Их исследования легли в основу теории эллиптических краевых задач для псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с гладкой границей. Для многообразий с негладкой границей существует множество различных локальных ситуаций и канонических областей, и для их исследования был разработан новый подход [1, 2, 3].

Несмотря на всю значимость проведенных исследований, вопрос нахождения решений псевдодифференциальных уравнений и связанных с ними эллиптических краевых задач остается открытым. Принимая во внимание эти обстоятельства, была предпринята попытка

создать дискретную теорию эллиптических псевдодифференциальных уравнений и соответствующих дискретных краевых задач, описать картину их разрешимости и показать, что дискретные краевые задачи могут обладать хорошими аппроксимационными свойствами при подходящем выборе дискретных приближений [4, 5].

Список литературы

- [1] Vasil'ev V. B. *Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London: 2000.
- [2] Vasilyev V. B. *On some distributions associated to boundary value problems*. Complex Var. Elliptic Equ., 64 (2019), 888–898.
- [3] Vasilyev V., Kutaiba Sh. *Elliptic equations in domains with cuts*. Int. J. Appl. Math., 34 (2021), 339–351.
- [4] Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. *Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space*. Math. Model. Anal., 23 (2018), 492–506.
- [5] Vasilyev V., Vasilyev A., Mashinets A. *On a general discrete boundary value problem for an elliptic pseudo-differential equation in a quadrant*. Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser., 29 (2023). 1–16.

ПОПЕРЕЧНИКИ ПО КОЛМОГОРОВУ АНИЗОТРОПНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА

ВАСИЛЬЕВА А. А.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, РФ

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, РФ
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $\mathbb{T}^d = [0, 2\pi]^d$ (при этом концы отрезков $[0, 2\pi]$ отождествляются). Будем рассматривать два вида анизотропных классов Соболева на $\mathbb{T}^d$: первый задан ограничениями на производные $\partial_j^{r_j} := \frac{\partial^{r_j}}{\partial x_j^{r_j}}$ в норме $L_{p_j}(\mathbb{T}^d)$ ($j = 1, \dots, d$), где p_j могут быть различными при разных j ; второй задан ограничениями на производные $\partial_j^{r_j}$ в анизотропной норме $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^d)$, где $\bar{p} = (p_1, \dots, p_d)$. Числа $r_j > 0$ ($j = 1, \dots, d$) могут быть дробными, а частные производные понимаются в смысле Вейля (см., например, [1]).

Через $S'(\mathbb{T}^d)$ обозначим пространство обобщенных функций на $\mathbb{T}^d$. Каждому элементу $f \in S'(\mathbb{T}^d)$ соответствует разложение в ряд Фурье: $f = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\bar{k}}(f) e^{i(\bar{k}, \cdot)}$, где сходимость рассматривается относительно топологии $S'(\mathbb{T}^d)$, $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^d$. Обозначим $\mathring{\mathbb{Z}}^d = \{(k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : k_1 k_2 \dots k_d \neq 0\}$, $\mathring{S}'(\mathbb{T}^d) = \left\{ f \in S'(\mathbb{T}^d) : f = \sum_{\bar{k} \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} c_{\bar{k}}(f) e^{i(\bar{k}, \cdot)} \right\}$.

Пусть $1 \leq p_1, \dots, p_d \leq \infty$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_d)$. Анизотропная норма $\|\cdot\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^d)}$ определяется индукцией по d : при $d = 1$ это стандартная норма в $L_{p_1}(\mathbb{T})$, при $d \geq 2$ норма задается рекуррентным соотношением $\|f\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^d)} = \|g_f\|_{L_{p_d}(\mathbb{T})}$, где $g_f(x_d) = \|f(\cdot, x_d)\|_{L_{(p_1, \dots, p_{d-1})}(\mathbb{T}^{d-1})}$.

Для $1 \leq p_j \leq \infty, r_j > 0, 1 \leq j \leq d, \bar{p} = (p_1, \dots, p_d), \bar{r} = (r_1, \dots, r_d)$ положим

$$W_{\bar{p}}^{\bar{r}}(\mathbb{T}^d) = \{f \in \mathring{S}'(\mathbb{T}^d) : \|\partial_j^{r_j} f\|_{L_{p_j}(\mathbb{T}^d)} \leq 1, 1 \leq j \leq d\},$$

$$\widetilde{W}_{\bar{p}}^{\bar{r}}(\mathbb{T}^d) = \{f \in \mathring{S}'(\mathbb{T}^d) : \|\partial_j^{r_j} f\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^d)} \leq 1, 1 \leq j \leq d\}.$$

Полные формулировки результатов написаны в [2], [3]. Здесь мы приведем один из случаев для оценок поперечников класса $W_{\bar{p}}^{\bar{r}}(\mathbb{T}^d)$.

Пусть $\bar{p} = (p_1, \dots, p_d)$. Определим число $\langle \bar{p} \rangle$ по формуле

$$\frac{1}{\langle \bar{p} \rangle} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \frac{1}{p_j}.$$

Для $\bar{a} = (a_1, \dots, a_d), \bar{b} = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\bar{a} \circ \bar{b} = (a_1 b_1, \dots, a_d b_d).$$

Теорема 1. Пусть $d \in \mathbb{N}, d \geq 2, 2 < q < \infty, 1 < p_j < \infty, r_j > 0, j = 1, \dots, d$, при этом $\frac{\langle \bar{r} \rangle}{d} + \frac{1}{q} - \frac{\langle \bar{r} \rangle}{\langle \bar{p} \circ \bar{r} \rangle} > 0$. Предположим, что $\sum_{i=1}^d \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_j} \right) < 1, j = 1, \dots, d$. Пусть $\{i \in \overline{1, d} : p_i < 2\} \neq \emptyset, \{i \in \overline{1, d} : p_i > 2\} \neq \emptyset$. Обозначим $\theta_1 = \frac{\langle \bar{r} \rangle}{d}, \theta_2 = \frac{\langle \bar{r} \rangle}{d} + \frac{1}{2} - \frac{\langle \bar{r} \rangle}{\langle \bar{p} \circ \bar{r} \rangle}, \theta_3 = \frac{q}{2} \left(\frac{\langle \bar{r} \rangle}{d} + \frac{1}{q} - \frac{\langle \bar{r} \rangle}{\langle \bar{p} \circ \bar{r} \rangle} \right)$. Предположим, что существует $j_* \in \{1, 2, 3\}$

такое, что $\theta_{j_*} < \min_{j \neq j_*} \theta_j$. Тогда

$$d_n(W_{\bar{p}}^{\bar{r}}(\mathbb{T}^d), L_q(\mathbb{T}^d)) \underset{\bar{r}, \bar{p}, q, d}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}}.$$

Список литературы

- [1] Тихомиров В.М. *Теория приближений*. Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр., 14, ВИНТИ, М., 1987, 103–260.
- [2] Васильева А.А. *Колмогоровские поперечники класса Соболева с ограничениями на производные в разных метриках*. Матем. сб., 215 no. 11 (2024), 33–64.
- [3] Vasil'eva A.A. *Kolmogorov widths of anisotropic function classes and finite-dimensional balls*. Eurasian Math. J. 15 no. 3 (2024), 88–93.

ОКРЕСТНОСТЬ НЕТРАНСВЕРСАЛЬНОЙ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ДИФФЕОМОРФИЗМА ПЛОСКОСТИ

ВАСИЛЬЕВА Е.В.

Россия, Санкт-Петербург
Санкт-Петербургский государственный университет
e.v.vasilieva@spbu.ru

Рассматривается диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Предполагается, что пересечение устойчивого и неустойчивого многообразия неподвижной точки в гомоклинической точке не является пересечением (касанием) конечного порядка. Изучается случай, когда касание устойчивого и неустойчивого многообразия определяется некоторой «ступенчатой» функцией одной переменной. Пример двумерного диффеоморфизма с таким касанием устойчивого многообразия с неустойчивым приведен в [1]. Известно [2], что в этом случае в произвольной окрестности гомоклинической точки может лежать бесконечное множество устойчивых периодических точек исходного диффеоморфизма, причем характеристические показатели этих точек отделены от нуля.

Цель доклада – дать описание инвариантных множеств, которые могут лежать в окрестности гомоклинической точки. Окрестность

любой устойчивой периодической точки содержит «подковы Смейла» и бесконечное множество точек, которые заполняют непрерывные кривые, траектории этих кривых не покидают расширенной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки.

Список литературы

- [1] Плисс В.А. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений*. Наука, М: 1977.
- [2] Васильева Е.В. *Диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками*. Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С.307-315

О СТАРШЕМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ПОКАЗАТЕЛЕ ИЗОБОВА ОДНОГО СЕМЕЙСТВА СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВЕЩЕСТВЕННОГО ПАРАМЕТРА

ВЕТОХИН А.Н.

МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия
anveto27@yandex.ru

Напомним, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с непрерывными ограниченными коэффициентами и старшим показателем Ляпунова $\lambda_n(A)$, старший экспоненциальный показатель Изобова определяется формулой

$$\nabla(A) = \sup_{\{B: \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|B(t)\| < 0\}} \lambda(A + B).$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному ограниченному отображению

$$A : \mathcal{M} \times [0; +\infty) \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n \quad (1)$$

построим функцию

$$\mu \mapsto \nabla(A(\mu, \cdot)). \quad (2)$$

В работе [1] установлено, что для любого отображения (1) функция (2) принадлежит третьему бэровскому классу. В статье [2] в случае, когда $\mathcal{M}$ является отрезком $[0; 1]$ построено отображение (1) такое,

что множество точек полунепрерывности сверху функции (2) пусто, там же в случае, когда $\mathcal{M}$ является множеством $\mathcal{B}$ иррациональных чисел с метрикой индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, установлено, что существует отображение (1) такое, что функция (2) не принадлежит второму классу Бэра.

В данном докладе получен следующий результат.

Теорема 1. *Если $n \geq 2$, пространство $\mathcal{M}$ содержит множество типа $F_{\sigma\delta}$, не являющееся множеством типа $G_{\delta\sigma}$, то найдется отображение (1) такое, что функция (2) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.*

Р. Бэр установил [3], что множество иррациональных чисел, у которых неполные частные при разложении в цепную дробь стремятся к бесконечности, является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ и не является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathcal{B}$. Используя этот результат и теорему 1, получим

Теорема 2. *Если $\mathcal{M} = [0; 1]$, $n \geq 2$, то найдется отображение (1) такое, что функция (2) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.*

Список литературы

- [1] Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление. Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 1. С. 5-8.
- [2] Ветохин А.Н. К бэровской классификации сигма-показателя и экспоненциального показателя Изобова. Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1302–1312.
- [3] Baire R. *Sur la representation des fonctions discontinues*. Acta. Math. 1906. V. 30. P. 1-48.

СУММИРУЕМОСТЬ КОРНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МОДИФИЦИРОВАННОГО КВАДРАТИЧНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА М. В. КЕЛДЫША

ВОЙТИЦКИЙ В.И.

РУДН, Россия

voytitskiy_vi@pfur.ru

Пучком М. В. Келдыша порядка n называют оператор-функцию

$$M_n(\mu) := I - \sum_{j=0}^{n-1} \mu^j T_j H^j - \mu^n H^n,$$

действующую в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где $T_j, H \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, H — нормальный оператор с нулевым ядром, такой что H^n является самосопряженным.

В работе рассматривается спектральная задача для “модифицированного” квадратичного пучка М. В. Келдыша вида

$$M_2(\mu)f = (C^{-1} - T_0 - \mu T_1 A^{-1} - \mu^2 A^{-2})f = 0, \quad (1)$$

где A^{-1} — компактный положительный оператор со степенной асимптотикой собственных значений $\lambda_j(A^{-1}) \sim c j^{-p}$, $p > 0$; C^{-1} — непрерывный и непрерывно обратимый положительный оператор; компактные операторы T_j имеют структуру $T_0 = Q_0 A^{q-1}, T_1 = Q_1 A^{q-1}$, где $Q_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $q \in [0; 1)$. Эта задача порождается задачей на собственные значения для эллиптического операторного пучка

$$L(\lambda) := \lambda^2 C + \lambda B + (A^2 - K) \quad (\lambda = -i\mu) \quad (2)$$

с неограниченными операторными коэффициентами A, B и K в случае выполнения условий подчинения: $KA^{-1}, BA^{-q} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

С помощью замены $g = \mu A^{-1}f$ задача (1) приводится к задаче на собственные значения линейного в $\mathcal{H}^2$ пучка

$$\mathcal{L}(\mu) := \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_0 & T_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

которая может быть сведена к задаче на собственные значения суммы неограниченных операторов $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1^*$ имеет дискретный спектр с положительной и отрицательной ветвями собственных

значений, удовлетворяющих оценке $|\lambda_j^\pm(\mathcal{A}_1)| \geq kj^p$, $k > 0$, а оператор $\mathcal{A}_2$ подчинен оператору $\mathcal{A}_1^{q_1}$ для $q_1 > q$ (в случае $q = 0$ он является ограниченным). Отсюда пользуясь результатами из [2] получаем основное утверждение.

Теорема 1. *Каждый набор функций $(f_0, f_1) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}(A)$ раскладывается по системе собственных и присоединенных элементов операторного пучка (3). При этом из этой системы можно выделить в $\mathcal{H}$ двукратный базис со скобками Бари, Рисса либо Абеля-Лидского порядка $\alpha > p^{-1} - (1 - q_1)$ соответственно в одном из трех случаев:*

$$1) p(1 - q_1) > 1; \quad 2) p(1 - q_1) = 1; \quad 3) p(1 - q_1) < 1.$$

Здесь $q_1 \in (q; 1)$, если $q \in (0; 1)$; либо $q_1 = 0$ при $q = 0$.

Отметим, что спектр пучка (1) является дискретным с единственной предельной точкой на бесконечности. Он находится в некоторой окрестности нуля и двух “параболических областях”, примыкающих к положительной и отрицательной полуосям, удовлетворяющих неравенствам $|\operatorname{Im} \mu| \leq b'(\pm \operatorname{Re} \mu)^{q_1}$. В случае $C = I$ имеем $q_1 = q$, при этом $b' = b + \varepsilon$, $b = \|\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1^{-q}\|$, и выполнена асимптотика $|\mu_j^\pm| \sim kj^p$.

Данные материалы опубликованы в статье [3], где полученные результаты дополнены двумя приложениями: задачей о квадратичном пучке Штурма-Лиувилля и задачей о нормальных движениях системы сочлененных маятников с полостями, заполненными идеальными несжимаемыми жидкостями, при учете трения в шарнирах.

Список литературы

- [1] Келдыш М. В. *О полноте собственных функций некторых классов несамопряженных линейных операторов*. Успехи мат. наук, 24, 4: 160 (1971), 15-41.
- [2] Агранович М. С. *О суммируемости рядов по корневым векторам несамопряженных эллиптических операторов*. Функциональный анализ и его приложения, 10:3 (1976), 1-12.
- [3] Войтицкий В. И. *Слабо диссипативные линейные динамические системы и квадратичный операторный пучок М. В. Келдыша*. Математический заметки, 116:2 (2024), 195-211.

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

ГАЛКИН В.А.

Сургутский филиал НИЦ "Курчатовский институт" НИИСИ, Россия
Сургутский государственный университет, Россия
val-gal@yandex.ru

В координатном пространстве $R_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3)\}$ рассматривается динамика во времени $t \in R$ гладкого поля скоростей течения $V : R_3 \times R \rightarrow R_3$ ($V \in C^2$), удовлетворяющего системе Навье–Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P(x, t) = G(x, t) + \varepsilon^2 \Delta V, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (1)$$

где $P : R_3 \times R \rightarrow R$ — давление жидкости, $\bar{\rho}$ и ε^2 — постоянные, характеризующие плотность и вязкость жидкости, $G(x, t)$ — плотность объемных сил. Рассматривается класс решений $\{V, P\}$, обладающих свойством симметрии относительно некоторой оси L , которую без потери общности направим вдоль вектора $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$, $(\{\bar{e}_i\}_{i=1}^3$ — ортонормированный базис в R_3). Проекцию вектора x на ось L обозначим в дальнейшем $z = (x, \bar{e}_3)$, положим $x_i \stackrel{\text{def}}{=} (x, \bar{e}_i)$. Предположение об осевой симметрии функции u относительно оси L означает, что ее зависимость от пространственных аргументов x_1, x_2 осуществляется через величину $\rho(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$. Для этого класса задач наряду с декартовыми координатами удобно использовать цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) . Для функции u , обладающей осевой симметрией, положим $u(x) \equiv \bar{u}(\rho, z)$, и в этом случае оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u(x) = \Delta_\rho \bar{u} + \bar{u}_{zz}, \quad \Delta_\rho \bar{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \bar{u}_\rho).$$

Пусть множество $M = R_3 \setminus L$ и функция $F \in C^4(M)$ при некоторой постоянной $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, удовлетворяет соотношению

$$\Delta F(x) + \lambda^2 F(x) = 0, \quad x \in M. \quad (2)$$

Предположим, что F обладает на множестве M осевой симметрией: $F(x) \equiv \bar{F}(\rho, z)$. Назовем осесимметричным вихревым полем, порожденным функцией F на множестве M , отображение $U : M \rightarrow \mathbb{R}_3$, заданное соотношением

$$U(x) = \lambda^{-2} \rho^{-1} [(\bar{F}_{\rho,z} x_1 + \lambda \bar{F}_{\rho} x_2) \bar{e}_1 + (-\lambda \bar{F}_{\rho} x_1 + \bar{F}_{\rho,z} x_2) \bar{e}_2 - (\rho \Delta_{\rho} \bar{F}) \bar{e}_3], \quad (3)$$

Произвольные линейные комбинации осесимметричных полей вида (2), (3) сохраняют это свойство для результирующего поля.

Теорема 1. Пусть рассматривается произвольная линейная комбинация с коэффициентами $w_k \in \mathbb{R}$

$$U(x) = \sum_k w_k U_k(x), \quad (4)$$

осесимметричных полей $U_k(x)$, заданных формулами (2), (3) при помощи функций $F_k = \bar{F}_k(\rho, z)$, соответствующих в уравнении (3) фиксированному значению параметра $\lambda \neq 0$. Тогда инвариантные многообразия для динамической системы T_t , порожденной полем (4), удовлетворяют соотношению

$$\bar{\Phi}(\rho, z) \equiv \rho \sum_k w_k \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{F}_k(\rho, z) = c \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Примеры инвариантных многообразий – это сферы, торы, цилиндры и их алгебраические комплексы, симметричные относительно оси L .

Работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ "Курчатовский институт"—НИИСИ по теме No FNEF-2024-0001.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ЗАТУХАНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ, НАЛОЖЕННЫХ НА ПРОДОЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОГО СЛОЯ

ГЕОРГИЕВСКИЙ Д.В.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Россия
georgiev@mech.math.msu.su

Исследуется эволюция картины возмущений, наложенных на плоскопараллельное периодическое по времени течение ньютоновской

вязкой жидкости в слое, одна из границ которого совершает продольные гармонические колебания вдоль самой себя, а на другой границе возможно проскальзывание материала с нулевым трением [1], [2]. Ставится обобщенная задача Орра – Зоммерфельда как линеаризованная задача гидродинамической устойчивости нестационарных вязких несжимаемых течений [3]. На основе метода интегральных соотношений, основанного на вариационных неравенствах для квадратичных функционалов [4] и развитого применительно к нестационарным основным течениям [5], [6], [7], [8], выводятся достаточные интегральные оценки экспоненциального затухания начальных возмущений. Эти оценки для каждого волнового числа представляют собой неравенства, связывающие три постоянные безразмерные величины: среднюю по периоду максимальную по толщине скорость сдвига в слое, амплитуду колебаний границы и число Рейнольдса. Сравниваются оценки устойчивости для плоской и трехмерной картин возмущений.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант 24-21-20008.

Список литературы

- [1] Davis S.H. *The stability of time-periodic flows*. Ann. Rev. of Fluid Mech., 8(1976), 57–74.
- [2] Or A.C. *Finite-wavelength instability in a horizontal liquid layer on an oscillating plane*. J. Fluid Mech., 335(1997), 213–232.
- [3] Бетцов Р., Криминале В. *Вопросы гидродинамической устойчивости*. Мир, М: 1971.
- [4] Козырев О.Р., Степанянц Ю.А. *Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости*. Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Изд-во ВИНТИ, М: 25(1991), 3–89.
- [5] Георгиевский Д.В. *Избранные задачи механики сплошной среды*. 2-ое изд. ЛЕНАНД, М: 2020.
- [6] Георгиевский Д.В. *Оценки экспоненциального затухания возмущений, наложенных на продольные гармонические колебания вязкого слоя*. Дифференциальные уравнения, 56(2020), 1366–1375.
- [7] Georgievskii D.V., Putkaradze V.G. *Energy-based stability estimates for incompressible media with tensor-nonlinear constitutive relations*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 35(2023), 1403–1415.

- [8] Георгиевский Д.В. *Достаточные энергетические оценки устойчивости нестационарных комбинированных сдвиговых течений в цилиндрическом слое*. Изв. РАН. МЖГ, № 6(2024), 51–59.

ЧАСТИЧНО СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

ГОЛУБЯТНИКОВ А.Н.^{1,a}, ЗАХАРОВ С.А.^{1,b}

¹МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

^agolubiat@mail.ru, ^bzaharovsa@my.msu.ru

Известно, что всякое одномерное решение уравнений газовой динамики с плоскими волнами может быть расширено до учета поперечных движений с однородной деформацией, что сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, интегралы которых зависят от продольной лагранжевой координаты. К такого рода решениям относится, в частности, и задача Кеплера о движении материальной точки в центральном поле, решенная еще Ньютоном. Здесь основным решением, называемым далее сферически симметричным (если его включить в пучок лучей, исходящих из притягивающего центра), является радиальное движение с нулевым моментом количества движения. Учет движения, поперечного к радиальному, приводит к общему решению задачи, траекториями которого являются известные кривые второго порядка. Общая теория частично инвариантных решений дифференциальных уравнений содержится в [1]. Примеры частично сферически симметричных течений гравитирующего газа можно найти в [2]. Постановку таких задач в релятивистской механике — в [3].

В докладе в рамках динамики идеального газа или несжимаемой невязкой жидкости строятся частично сферически симметричные решения, в которых к радиальному движению добавляются азимутальные течения, имеющие три первых интеграла, зависящие от начальной радиальной переменной. Необходимым условием существования таких решений является зависимость давления и плотности только от радиальной координаты и времени, а также наличие дополнительной объемной потенциальной силы типа ньютоновского притяжения

или кулоновского отталкивания, связанной со сферическим распределением массы или заряда. В этом случае, независимо от уравнений состояния среды, радиальное движение продолжает зависеть от азимутальных движений (по долготе и широте в сферических координатах) через действие радиальной центробежной силы. Показано, что существование таких решений вблизи полюсов возможно только при полном отсутствии соответствующего движения, направленного вдоль изменения долготы. Допустимы только широтные течения. В качестве примера рассматривается задача о нелинейных однородных колебаниях конечной массы совершенно газа, при которых радиальная центробежная сила вблизи центра приводит к отталкиванию, превосходящему силу ньютоновского притяжения. Аналогичные результаты получены и в рамках несжимаемой жидкости, где дано решение о динамике шара с переменными по начальному радиусу плотностью и по удельным моментом количества движения. Обсуждается возможность существования центрального пузырька.

Список литературы

- [1] Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. Наука, М: 1978. 400 с.
- [2] Голубятников А. Н., Трускиновский Л. М. *Класс точных решений в задаче о несимметричном гравитационном сжатии тела*. ПММ, 1981, том 45, № 5. С. 956—958.
- [3] Golubiatnikov A. N. *On partly symmetric solutions of the equations for gravitating gas..* Gravitation and Cosmology, 2006, vol. 12, № 2 — 3. P. 144–146.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С КРЗ-НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

ГРЕБЕНЕВА А.А.

Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы, Россия
agrebenevaa@yandex.ru

Уравнения с нелинейностями типа Кардара-Паризи-Жанга занимают особое место, описывая универсальный класс явлений, связанных со стохастическим ростом поверхностей и диффузией с учетом

флуктуаций. Такие операторы возникают в приложениях к различным областям, которые невозможно описать моделью, содержащей классические линейные дифференциальные уравнения: многомерная динамика интерфейса [1], направленный рост полимеров [2], модели дробной диффузии [3], модели игровой зависимости с неустойчивым управлением [4], модели свободных фермионов с конечными температурами [5] и т. д.

В работе исследуется фундаментальное KPZ-уравнение в параболической форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\alpha}{u} |\nabla u|^2 + \gamma(x, t) u^\beta, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u \Big|_{x \in \partial\Omega} = \left[\int_{\Omega} K(x, y, t) u^{\alpha+1}(y, t) dy \right]^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u \Big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где Ω это ограниченная в $\mathbb{R}^n$ область с гладкой границей, u_0 непрерывна и положительна в Ω , γ локально гёльдерова в $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$, K непрерывна и неотрицательна в $\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0, \infty)$.

Теорема 1. Если $\int_{\Omega} K(x, y, t) dy \geq 1$ для любого $x \in \partial\Omega$ и любого неотрицательного t , функция $(\alpha + 1)\gamma(x, t)$ неотрицательна, интеграл $\int_0^\infty \inf_{x \in \overline{\Omega}} \gamma(x, t) dt$ расходится, а $\frac{\beta-1}{\alpha+1} > 0$, то задача (1)–(3) не имеет положительных решений.

При $\alpha > -1$ достаточные условия можно указать не только для отсутствия, но и для существования решений. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если $\alpha > -1$, $\beta > 1$, функция $\gamma(x, t)$ ограничена, существует такое $K_0 < 1$, что $\int_{\Omega} K(x, y, t) dy \leq K_0$ для любого $x \in \partial\Omega$ и любого неотрицательного t и функция $K(x, y, t)$ отлична от тождественного нуля при любом $x \in \partial\Omega$ и любом неотрицательном t , то существует такая (достаточно малая) неотрицательная функция $u_0(x)$, что задача (1)–(3) имеет решение.

Совместное исследование с А. Б. Муравником.

Список литературы

- [1] Kardar M. et al. *Dynamic scaling of growing interfaces*. Phys. Rev. Lett., 56 (1986), 889-892.
- [2] Medina E. et al. *Burgers equation with correlated noise: Renormalization group analysis and applications to directed polymers and interface growth*. Phys. Rev., A39 (1989), 3053-3075.
- [3] Abdellaoui B., Peral I. *Towards a deterministic KPZ equation with fractional diffusion: The stationary problem*. Nonlinearity, 31 (2018), 1260-1298.
- [4] Zhao K. *Global stability of a novel nonlinear diffusion online game addiction model with unsustainable control*. AIMS Math., 7 (2022), 20752-20766.
- [5] Charlier C. et al. *Uniform tail asymptotics for Airy kernel determinant solutions to KdV and for the narrow wedge solution to KPZ*. J. Funct. Anal., 283 (2022), 109608.

РЕГУЛЯРНОСТЬ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ НЕДИАГОНАЛЬНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ СОСТАВНОГО ТИПА

ГРИШИНА Г.В.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия
ggrishina@bmstu.ru

Рассматривается модельная задача для линейной параболической системы с недиагональной главной матрицей. Компоненты решения $u(z) = \{u^k(z)\}^{k \leq N}$, $N > 1$, $z = (x, t)$ связаны условиями типа Дирихле и Неймана посредством некоторой матрицы на плоской части Γ_1 цилиндра $Q_1^+ = B_1^+ \times (-1, 0)$:

$$u_t - \operatorname{div}(a(z)\nabla u) = -\operatorname{div} F(z) + f(z), \quad z \in Q_1^+, \quad (1)$$

$$u'(z) - bu''(z) = 0, \quad z \in \Gamma_1; \quad (2)$$

$$b^* \left(\frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)' + \left(\frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)'' = -(b^* F'(z) + F''(z)), \quad z \in \Gamma_1. \quad (3)$$

Здесь $u' = \{u^k\}^{1 \leq k \leq m}$, $u'' = \{u^k\}^{m+1 \leq k \leq N}$, $0 \leq m \leq N$ — фиксированное число; $\nabla u = \{u_{x_\alpha}^k\}_{\alpha \leq n}^{k \leq N}$; $B_1^+ = B_1(0) \cap \{x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $B_1(0)$ — единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $\gamma_1 = B_1(0) \cap \{x_n = 0\}$,

$\Gamma_1 = \gamma_1 \times (-1, 0)$; $\mathbf{n}(x) = (0, \dots, 0, -1)$ — единичная внешняя нормаль к B_1^+ в точке $x \in \gamma_1$. Эллиптический оператор в системе определен следующим образом

$$\operatorname{div}(a(z) \nabla u(z)) = \left\{ \sum_{\alpha, \beta \leq n; l \leq N} (a_{kl}^{\alpha\beta}(z) u_{x_\beta}^l)_{x_\alpha} \right\}_{k \leq N},$$

вектор производной по конормали имеет вид

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} = \left(\left(\frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)', \left(\frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)'' \right),$$

где

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)' &= - \left\{ \sum_{\beta \leq n; l \leq N} a_{kl}^{n\beta}(z, u) u_{x_\beta}^l \right\}_{k \leq m}, \\ \left(\frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)'' &= - \left\{ \sum_{\beta \leq n; l \leq N} a_{kl}^{n\beta}(x, u) u_{x_\beta}^l \right\}_{m+1 \leq k \leq N}; \end{aligned}$$

b — матрица размера $[m \times (N - m)]$, b^* — транспонированная к b . Случай $b = 0$ не исключается.

Если $m = 0$ или $m = N$, задача (1)–(3) является задачей с краевыми условиями типа Неймана или Дирихле соответственно, и эти случаи здесь не обсуждаются.

Предполагаем, что вектор функции

$$F = \{F_k^\alpha\}_{1 \leq k \leq N}^{1 \leq \alpha \leq n}, \quad f = \{f^k\}_{1 \leq k \leq N}$$

принадлежат пространству $L^2(Q_1^+)$.

Устанавливается непрерывность по Гельдеру слабых решений задачи (1)–(3). в окрестности Γ_1 . При доказательстве используется модификация метода A -калорической аппроксимации, адаптированная к рассматриваемой задаче. В соответствии с этим методом, решение аппроксимируется локально по норме L^2 решением простейшей параболической системы с постоянной матрицей A . Метод A -калорической аппроксимации адаптирован к исследованию различных краевых задач для параболических систем. При исследовании задачи (1)–(3) сложность состоит в том, что множество допустимых функций в интегральном тождестве, определяющем решение, зависит от матрицы b .

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ КАСКАДОВ МОРСА-СМЕЙЛА НА МНОГООБРАЗИЯХ РАЗМЕРНОСТИ 4 И ВЫШЕ

ГУРЕВИЧ Е.Я.

НИУ ВШЭ-Нижний Новгород
НИУ ВШЭ, Россия
egurevich@hse.ru

В докладе рассматриваются динамические системы, порожденные степенями диффеоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$ на замкнутом гладком многообразии M^n размерности $n \geq 1$. Напомним, что диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла* (MS -диффеоморфизмом), если его неблуждающее множество Ω_f конечно и инвариантные многообразия периодических точек имеют только трансверсальные пересечения.

Функция Морса $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *энергетической функцией* диффеоморфизма f , если множество ее критических точек совпадает с Ω_f , и φ строго убывает вдоль орбит f , отличных от Ω_f . Пикстон в [1] доказал, что энергетическая функция существует для любого MS -диффеоморфизма с двумерным несущим многообразием, и построил пример MS -диффеоморфизма на трехмерной сфере S^3 , для которого энергетической функции не существует. Этот эффект связан в первую очередь с возможностью дикого вложения замыканий сепаратрис седловых периодических точек диффеоморфизма. Гринес, Лауденбах и Починка в [2], [3] получили необходимые и достаточные условия существования энергетической функции для MS -диффеоморфизмов на трехмерных многообразиях. В частности, в [3] показано, что если все одномерные сепаратрисы MS -диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$ образуют тривиальные пучки, то f обладает энергетической функцией. В [4] показано, что для $n \neq 4$ одномерные сепаратрисы, не участвующие в гетероклинических пересечениях, всегда образуют тривиальные пучки. Однако, прямое обобщение результата и техники работы [3] на случай высшей размерности невозможно. Тем не менее, удастся выделить класс диффеоморфизмов, для которых существует энергетическая функция.

Теорема 1. Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ — диффеоморфизм Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, и M^n — либо сфера S^n , либо прямое произведение $S^{n-1} \times S^1$, $n \geq 4$. Тогда для f существует энергетическая функция.

Для случая $M^n = S^n$ результат теоремы следует из работы [5], где доказано, что для любого MS -диффеоморфизма $f : S^n \rightarrow S^n$ без гетероклинических пересечений существует $m > 0$ такое, что f^m включается в топологический поток, и работы [6], где доказано существование непрерывной энергетической функции для любого регулярного топологического потока. В случае, когда $M^n = S^{n-1} \times S^1$, существуют MS -диффеоморфизмы без гетероклинических пересечений, не включающиеся ни в какие топологические потоки. Тем не менее, и для этих диффеоморфизмов удастся построить энергетическую функцию.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Список литературы

- [1] D. Piston, *Wild unstable manifolds*, Topology, 16 (1977), 167–172.
- [2] V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, *Self-indexing energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds*, Moscow Math. J., 9:4 (2009), 801–821.
- [3] В.З. Гринес, Ф. Лауденбах, О.В. Починка, *Динамически упорядоченная энергетическая функция для диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях*, Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Труды МИАН, 278, МАИК Наука/Интерпериодика, М., 2012, 34–48.
- [4] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, В.С. Медведев, *Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности, большей трех*, Труды МИАН, 261 (2008), 61–86.
- [5] V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, *On embedding of multidimensional Morse–Smale diffeomorphisms into topological flows*, Mosc. Math. J., 19:4 (2019), 739–760.
- [6] O. Pochinka, S. Zinina, *Construction of the Morse–Bott Energy Function for Regular Topological Flows*, Regul. Chaotic Dyn., 26:4 (2021), 350–369.

ВОКРУГ ГИПОТЕЗЫ НЕЛЬСОНА

ГУСЕВ Н.А.

МФТИ, Россия

ngusev@phystech.su

Пусть $\mathbf{v}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ — локально интегрируемое бездивергентное (в смысле обобщенных функций) векторное поле. В 1962 году Нельсон выдвинул следующую гипотезу [1] (см. также [2]):

Гипотеза 1. *Если $\mathbf{v}$ квадратично интегрируемо и имеет компактный носитель, то соответствующий неограниченный оператор $A_0: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ вида $A_0(\rho) = \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$ с областью определения $D(A_0) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ существенно кососопряжен.*

В случае $d \geq 3$ эта гипотеза была опровергнута Айзенманом [2], однако случай $d = 2$ до недавнего времени оставался открытым. Опровержение гипотезы Нельсона в этом случае вытекает из результатов, полученных в [3] и [4]. В данном докладе планируется обсудить связь существенной кососопряженности оператора A_0 с другими свойствами поля $\mathbf{v}$: цепным свойством, ренормализацией, единственностью обобщенных решений задачи Коши для уравнения неразрывности (как вперед, так и назад по времени) и со слабым свойством Сарда соответствующей функции тока в случае $d = 2$.

Данный доклад основан на совместной работе с К.Ю. Замана, М.В. Коробковым и Е.Ю. Пановым. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00315.

Список литературы

- [1] Nelson E. *Les écoulements incompressibles d'énergie finie*. Colloques internat. Centre nat. rech. sci., №117, pp. 159–165 (1962).
- [2] Aizenman M. *Vector Fields as Generators of Flows: A counterexample to Nelson's conjecture*. Annals of Math., V. 107, №2, pp. 287–296 (1978).
- [3] Alberti G., Bianchini S., Crippa G. *A uniqueness result for the continuity equation in two dimensions*. Journal of the European Mathematical Society, V. 16, № 2, pp. 201–234 (2014).
- [4] Panov E.Yu. *On one criterion of the uniqueness of generalized solutions for linear transport equations with discontinuous coefficients*. arXiv preprint № 1504.00836 (2015).
- [5] Gusev N.A., Korobkov M.V. *The Nelson conjecture and chain rule property*. arXiv preprint № 2411.09338 (2024).

- [6] Bouchut F., Crippa G. *Uniqueness, renormalization, and smooth approximations for linear transport equations*. SIAM J. Math. Anal., V. 38, No. 4, pp. 1316–1328 (2006).

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

ДЕМИДЕНКО Г.В.^{1,a}, БОНДАРЬ А.А.^{2,b}, ГАНЖАЕВА М.Ш.^{2,c}

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

^ademidenk@math.nsc.ru, ^banna.alex.bondar@gmail.com, ^cm.ganzhaeva@g.nsu.ru

В работе рассматриваются системы линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $\{A(n)\}$ – N -периодическая последовательность матриц размера $m \times m$, т. е. $A(n + N) \equiv A(n)$. Предполагается, что система (1) экспоненциально дихотомична [1]. Согласно спектральному критерию это эквивалентно тому, что спектр матрицы монодромии $X(N)$ не пересекается с единичной окружностью.

В работе [2] установлен новый критерий экспоненциальной дихотомии, который формулируется в терминах разрешимости следующей краевой задачи для системы разностных уравнений Ляпунова

$$\left\{ \begin{array}{l} H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = (X^*(l))^{-1}P^*X^*(l)X(l)PX^{-1}(l) \\ -(X^*(l))^{-1}(I - P)^*X^*(l)X(l)(I - P)X^{-1}(l), \quad l = 0, 1, \dots, N - 1, \\ H(0) = H(N) > 0, \\ H(0) = (I - P)^*H(0)(I - P) + P^*H(0)P, \\ X(N)P = PX(N), \quad P^2 = P. \end{array} \right.$$

где $\{X(j)\}$ – матрицант системы (1).

Этот критерий оказался очень эффективным при доказательстве теорем о возмущении коэффициентов и проведении численных расчетов [3].

В докладе мы представляем новые результаты о свойствах решений различных краевых задач для системы (1), полученные с использованием этого критерия.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Список литературы

- [1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. М.: Наука, 1970.
- [2] Демиденко Г. В., Бондарь А. А. Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами. Сиб. матем. журн., 57 (2016), 1240–1254.
- [3] Демиденко Г. В., Бондарь А. А., Ганжаева М. Ш. Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений при возмущении коэффициентов. Челябинский физ.-мат. журн., 9 (2024), 561–572.

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССА ДИНАМИКИ СОРБЦИИ

ДЕНИСОВ А.М.^{1,a}, ЧЖУ Д.^{1,b}

¹МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия

^aden@cs.msu.ru, ^bzhudq1002@163.com

Рассмотрим модель процесса динамики сорбции

$$u_x(x, t) + a_t(x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$a_t(x, t) = \gamma(t)(u(x, t) - \psi(a(x, t))), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$a(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где $u(x, t)$ — концентрация вещества вне сорбента, $a(x, t)$ — концентрация вещества в сорбенте, $\mu(t)$ — входная концентрация вещества, $\psi(s)$ — функция, обратная к изотерме сорбции, $\gamma(t)$ — кинетический коэффициент, $Q_\tau = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq \tau\}$.

Лемма Пусть функции $\gamma(t)$, $\mu(t)$ и $\psi(s)$ удовлетворяют следующим условиям: $\gamma, \mu \in C[0, T]$; $\gamma(t) > 0$, $\mu(t) > 0$, $t \in [0, T]$; $\psi \in C^1(R)$, $\psi(0) = 0$, $0 < \psi'(s) \leq \psi_1$, $s \in R$, $\psi_1 = \text{const}$. Тогда существует единственная пара функции $u(s, t)$, $a(x, t)$, являющихся классическим решением задачи (1)–(4).

Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)–(4) от функции $\gamma(t)$ будем обозначать его $u(s, t; \gamma)$, $a(x, t; \gamma)$.

Сформулируем обратную задачу 1. Пусть функции $\mu(t)$ и $\psi(s)$ заданы, а $\gamma(t)$ неизвестна. Требуется определить $\gamma(t)$ по дополнительной информации о решении задачи (1)–(4)

$$u(l, t; \gamma) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где $g(t)$ — заданная функция.

Определение 1. Функция $\gamma(t)$ называется решением обратной задачи 1 на отрезке $[0, t_0]$, если $\gamma \in C[0, t_0]$, $\gamma(t) > 0$, $t \in [0, t_0]$, $u(s, t; \gamma)$, $a(x, t; \gamma)$ удовлетворяют (1)–(5) для $(x, t) \in Q_{t_0}$.

Теорема 1. Пусть функции $\mu(t)$ и $\psi(s)$ удовлетворяют условиям леммы, а $g(t)$ такова, что $g \in C[0, T]$, $0 < g(t) < \mu(t)$, $0 \leq t \leq T$. Тогда найдется такое $t_0 \in (0, T]$, что на отрезке $[0, t_0]$ существует решение обратной задачи 1 $\bar{\gamma}(t)$.

Сформулируем обратную задачу 2. Пусть функции $\mu(t)$ и $\psi(s)$ заданы, а $\gamma(t)$ неизвестна. Требуется определить $\gamma(t)$ по дополнительной информации о решении задачи (1)–(4)

$$u_x(l, t; \gamma) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

где $h(t)$ — заданная функция.

Определение 2. Функция $\gamma(t)$ называется решением обратной задачи 2 на отрезке $[0, t_0]$, если $\gamma \in C[0, t_0]$, $\gamma(t) > 0$, $t \in [0, t_0]$, $u(s, t; \gamma)$, $a(x, t; \gamma)$ удовлетворяют (1)–(4), (6) для $(x, t) \in Q_{t_0}$.

Теорема 2. Пусть функции $\mu(t)$ и $\psi(s)$ удовлетворяют условиям леммы, а $h(t)$ такова, что $h \in C[0, T]$, $h(t) < 0$, $0 \leq t \leq T$, $-\frac{h(0)}{\mu(0)} < \frac{1}{l \exp(1)}$. Тогда найдется такое $t_0 \in (0, T]$, что на отрезке $[0, t_0]$ существуют два решения обратной задачи 2 $\bar{\gamma}_1(t)$ и $\bar{\gamma}_2(t)$.

В докладе будут также сформулированы теоремы существования решения обратных задач для моделей процесса динамики сорбции, отличных от (1)–(4).

Список литературы

- [1] Денисов А.М., Чжу Дунцинъ. *Обратная задача для математической модели динамики сорбции с переменным кинетическим коэффициентом*. Вестник МГУ сер.15, Вычислительная математика и кибернетика, 2022, № 4, С. 5-13.
- [2] Денисов А.М., Чжу Дунцинъ. *Существование двух решений обратной задачи для математической модели динамики сорбции* Дифференциальные уравнения, 2023, Т. 59, № 10, С. 1433-1437.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

ДЕНИСЮК В.А.

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия
v.denisjuk@g.nsu.ru

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = g(t, x_n) - \frac{n-1}{\tau} x_1, & t > 0, \\ \frac{dx_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau} x_{j-1} - \frac{n-1}{\tau} x_j, & j = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = -\theta x_n + \frac{n-1}{\tau} x_{n-1}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\theta > 0$, функция $g(t, z)$ непрерывна, ограничена и липшицева по второму аргументу. Системы такого вида возникают при описании процесса многостадийного синтеза вещества, где n — количество стадий, τ — время протекания процесса. Отметим, что в реальных задачах количество стадий n может быть настолько большим, что делает невозможным как теоритическое, так и численное исследование таких систем. Г.В. Демиденко в [1] установил, что последняя компонента $x_n(t)$ решения системы (1), которая отвечает за концентрацию конечного продукта, при $n \gg 1$ близка к решению уравнения с запаздыванием

$$\frac{dy}{dt} = -\theta y + g(t - \tau, y(t - \tau)). \quad (2)$$

Используя предложенный в [1] подход, были установлены связи между решениями уравнений с запаздыванием и решениями различных классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности (см., например, [2-5]). Отметим, что при исследовании многостадийного синтеза вещества с учетом обратимости процесса возникают системы следующего вида

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = g(t, z_n) - \frac{n-1}{\tau_1} z_1 + \frac{n-1}{\tau_2} z_2, & t > 0, \\ \frac{dz_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1} z_{j-1} - \left(\frac{n-1}{\tau_1} + \frac{n-1}{\tau_2} \right) z_j + \frac{n-1}{\tau_2} z_{j+1}, & j = 2, \dots, n-2, \\ \frac{dz_{n-1}}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1} z_{n-2} - \left(\frac{n-1}{\tau_1} + \frac{n-1}{\tau_2} \right) z_{n-1}, \\ \frac{dz_n}{dt} = -\theta z_n + \frac{n-1}{\tau_1} z_{n-1}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\tau_2 > \tau_1 > 0$. В работе мы изучаем свойства решений системы (3) и устанавливаем, что $z_n(t)$ и $x_n(t)$ близки при $n \gg 1$ и $\tau = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}$, причем выполнена оценка

$$\max_{t \in [0, T]} |z_n(t) - x_n(t)| \leq C/\sqrt{n}. \quad (4)$$

Применяя доказанную в [1] предельную теорему и оценку (4), мы получаем, что $z_n(t)$ стремится к решению $y(t)$ уравнения (2) при $n \rightarrow \infty$. Используя эти результаты, можно исследовать асимптотические свойства решений уравнений с запаздыванием.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00367, <https://rscf.ru/project/24-21-00367/>

Список литературы

- [1] Лихошвай В.А., Фадеев С.И., Демиденко Г.В., Матушкин Ю.Г. *Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления*. Сиб. журн. индустр. математики, 7:1 (2004), 73-94.
- [2] Демиденко Г.В., Лихошвай В.А., Котова Т.В., Хропова Ю.Е. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом*. Сиб. мат. журн., 47:1 (2006), 58-68.
- [3] Демиденко Г.В. *Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом*. Сиб. мат. журн., 53:6 (2012), 1274-1282.
- [4] Матвеева И.И., Мельник И.А. *О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности*. Сиб. мат. журн., 53:2 (2012), 312-324.

- [5] Демиденко Г.В. *Метод решения одной биологической задачи большой размерности*. Сиб. журн. индустр. математики, 25:4 (2022), 42-53.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В БАССЕЙНАХ С ПОЛОГИМИ БЕРЕГАМИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ПО ВРЕМЕНИ ПРОСТРАНСТВЕННО ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

ДОБРОХОТОВ С.Ю.^{1,a}, НАЗАЙКИНСКИЙ В.Е.^{1,b},
НОСИКОВ И.А.^{2,c}, ТОЛЧЕННИКОВ А.А.^{3,d}

¹ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия

²ИЗМИ РАН имени Н. В. Пушкина, г. Калининград, Россия

³ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия

^as.dobrokhoto@gmail.com, ^bnazaikinskii@googlemail.com,

^cigor.nosikov@gmail.com, ^dtolchennikovaa@gmail.com

Обсуждается задача о коротковолновых асимптотических решениях линейной и нелинейной систем уравнений мелкой воды в бассейне с неровным дном и с пологими берегами, описывающие волны, возбуждаемые гармоническим по времени пространственно-локализованным источником. Сначала задача рассматривается в линейном приближении. Здесь используются недавно развитые подходы, основанные на каноническом операторе Маслова, что позволяет находить глобальное асимптотическое решение задачи в любой наперед заданной области, учитывающее наличие каустик и фокальных точек, а также вариационный принцип Ферма, который позволяет находить асимптотическое решение локально, то есть в окрестности заданной точки наблюдения. Наличие берега приводит к появлению “нестандартной” каустики, в окрестности которой асимптотическое решение системы линеаризованных уравнений выражается через модифицированный канонический оператор. Такое асимптотическое решение не определяет решение исходной нелинейной системы, для которой по-существу рассматривается задача со свободной границей. Согласно недавно развитому подходу, основанному на модифицированном преобразовании Карриера-Гринспана, асимптотическое решение нелинейной системы выражается через решение линеаризованной системы в виде параметрически заданных функций.

Полученные формулы описывают, в том числе, эффекты набега на берег изучаемых волн.

Работа выполнена по теме Госзадания № 124012500442-3.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

ДОЛГОВА Е.С.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика
С.П. Королева, Россия
dolgova.es@ssau.ru

Работа посвящена сравнительному анализу различных асимптотических методов при моделировании критических явлений в классической задаче автокаталитического горения [1].

При исследовании математической модели горения газа в случае автокаталитической реакции было установлено, что критические явления моделируются так называемыми траекториями-утками [2, 3]. Первые теоремы, касающиеся существования и асимптотических свойств траекторий-уток, были получены методами нестандартного анализа [4]. В дальнейшем для построения траекторий-уток использовались различные методы сращивания асимптотических разложений, техника blow-up и другие, см., например, библиографический обзор в [5].

В [2] было высказано предположение, что траектория-утка является одномерным медленным инвариантным многообразием со смешанной устойчивости и может быть получена в результате склеивания устойчивых и неустойчивых медленных инвариантных многообразий в одной точке поверхности срыва за счет наличия дополнительного скалярного параметра, который можно рассматривать как управляющий параметр.

В данной работе для построения траектории-утки, моделирующей критическое явление в задаче горения, кроме данного подхода используются также аппроксимации Паде разного порядка. Проводится сравнительный анализ полученных асимптотических выражений для управляющего параметра на основе численного эксперимента.

Список литературы

- [1] Соболев В.А., Щепаккина Е.А. *Редукция моделей и критические явления в макрокинетике*. ФИЗМАЛИТ, М.: 2010.
- [2] Gorelov G.N., Sobolev V.A. *Duck-trajectories in a thermal explosion problem*. Applied Mathematics Letters, 5 (1992), 3-6.
- [3] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. *Duck trajectories in a problem of combustion theory*. Differential Equations, 32(9) (1996), 1177-1186.
- [4] Benoit E., Callot J.L., Diener F., Diener M. *Chasse au canard*. Collectanea Mathematica, 31-32 (1981), 37-119.
- [5] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P., *Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications*. Lect. Notes Math. vol. 2114, Springer, Cham–Heidelberg–New York–Dordrecht–London: 2014.

УСРЕДНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ УЧЁТЕ КОРРЕКТОРОВ

ДОРОДНЫЙ М.А.^{1,a}, СУСЛИНА Т.А.^{1,b}

¹Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

^amdorodni@yandex.ru, ^bt.suslina@spbu.ru

Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, Ω — её ячейка, $\tilde{\Omega}$ — центральная зона Бриллюэна двойственной решётки. Для Γ -периодических функций используется обозначение $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В $L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряжённый эллиптический дифференциальный оператор $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и положительно определённая Γ -периодическая $(m \times m)$ -матрица-функция. Далее, $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$, где b_j — матрицы размера $m \times n$. Предполагается, что $m \geq n$ и символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d b_j \xi_j$ имеет ранг n при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$.

Мы изучаем поведение решений $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \rightarrow 0$, задачи Коши для гиперболического уравнения

$$\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = -(A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).$$

Так как $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) = \cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \boldsymbol{\phi} + A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \boldsymbol{\psi}$, то в операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ и $A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$.

Введём эффективный оператор $A_0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, где g^0 — положительная *эффективная матрица*. Напомним определение g^0 . Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ -периодическое решение задачи на ячейке Ω :

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Положим $\tilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1})$. Тогда $g^0 = \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Ранее было установлено, что $\cos(\tau A_{\varepsilon}^{1/2})$ и $A_{\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau A_{\varepsilon}^{1/2})$ сходятся к аналогичным функциям от A_0 в подходящих нормах. Справедливы оценки

$$\|\cos(\tau A_{\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau A_0^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon,$$

$$\|A_{\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau A_{\varepsilon}^{1/2}) - A_0^{-1/2} \sin(\tau A_0^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon.$$

Основные результаты работы — аппроксимации при учёте корректоров для оператора $A_{\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau A_{\varepsilon}^{1/2})$, а также для композиции $\cos(\tau A_{\varepsilon}^{1/2})(I + \varepsilon \Lambda^{\varepsilon} b(\mathbf{D}) \Pi_{\varepsilon})$:

$$\begin{aligned} \|\cos(\tau A_{\varepsilon}^{1/2})(I + \varepsilon \Lambda^{\varepsilon} b(\mathbf{D}) \Pi_{\varepsilon}) - \cos(\tau A_0^{1/2}) - \varepsilon K_1(\varepsilon, \tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \\ \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\cos(\tau A_{\varepsilon}^{1/2})(I + \varepsilon \Lambda^{\varepsilon} b(\mathbf{D}) \Pi_{\varepsilon}) - \cos(\tau A_0^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon, \tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq C(1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_{\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau A_{\varepsilon}^{1/2}) - A_0^{-1/2} \sin(\tau A_0^{1/2}) - \varepsilon \tilde{K}(\varepsilon, \tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq C(1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Здесь Π_{ε} — ПДО, символ которого есть характеристическая функция множества $\tilde{\Omega}/\varepsilon$. Корректор $K_1(\varepsilon, \tau)$ имеет вид

$$K_1(\varepsilon, \tau) = \Lambda^{\varepsilon} b(\mathbf{D}) \Pi_{\varepsilon} \cos(\tau A_0^{1/2}).$$

Корректоры $K(\varepsilon, \tau)$ и $\tilde{K}(\varepsilon, \tau)$ имеют более сложную структуру:

$$K(\varepsilon, \tau) = K_1(\varepsilon, \tau) + K_2(\tau) \quad \text{и} \quad \tilde{K}(\varepsilon, \tau) = \tilde{K}_1(\varepsilon, \tau) + \tilde{K}_2(\tau),$$

где $\tilde{K}_1(\varepsilon, \tau) = \Lambda^{\varepsilon} b(\mathbf{D}) \Pi_{\varepsilon} A_0^{-1/2} \sin(\tau A_0^{1/2})$, а члены $K_2(\tau)$ и $\tilde{K}_2(\tau)$ не зависят от ε ; их описание достаточно громоздко.

Эти оценки точны по порядку. В общем случае они точны также по типу операторной нормы и в отношении зависимости от времени τ . Однако, при некоторых дополнительных предположениях эти результаты допускают усиление. Полученные оценки применяются к исследованию решений задачи Коши для гиперболического уравнения с начальными данными из специального класса.

Исследование поддержано РНФ (грант № 22-11-00092-П).

МОДЕЛЬНАЯ ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

ЕГОРОВА А.Ю.

Рязанский государственный радиотехнический университет имени В. Ф.

Уткина, Россия

ayu_egorova@mail.ru

Рассматриваем в полуполосе $D_+ = D \cap \{x > 0\}$, где $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, с боковой границей $\Sigma = \bar{D}_+ \cap \{x = 0\}$, равномерно параболическую по Петровскому [1] систему

$$\begin{cases} Lu = f, \\ \partial_x u + \beta u|_{\Sigma} = \varphi, \\ u|_{t=0} = \psi, \end{cases} \quad (1)$$

где $u = (u_1, \dots, u_p)^T$, $f = (f_1, \dots, f_p)^T$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)^T$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)^T$, $\beta = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_p)$, $b_i \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$u^{(k)}(x) = A^k \partial_x^{2k} \psi(x) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} \partial_x^{2(k-j-1)} \partial_t^j f(x, 0) \quad \text{для } k \geq 0,$$

где $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^p$ – матрица вещественных коэффициентов системы (1) размера $p \times p$.

Для достаточно гладких решений положим $u^{(k)}(x) = \partial_t^k u(x, 0)$.

Чтобы решение третьей краевой задачи (1) принадлежало пространствам Зигмунда $H_m(\bar{D}_+)$, $m \geq 3$, требуется выполнение некоторых условий согласования. Для $\sigma > 0$ будем говорить, что для

третьей краевой задачи выполнены условия согласования порядка σ , если:

1) для $\sigma \notin \mathbb{N}$ выполнены соотношения $\partial_t^k \varphi(0) = u^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \dots, [\sigma]$, где $[\sigma]$ – целая часть числа σ ;

2) для $\sigma \in \mathbb{N}$ выполнены соотношения $\partial_t^k \varphi(0) = u^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \dots, \sigma - 1$, и

$$K_\sigma = \sup_{0 < t \leq T} t^{-1} |\Delta_t \partial_t^{\sigma-1} \varphi(0) - t^{1/2} \Delta_{t^{1/2}} u^{(\sigma)}(0)| < \infty,$$

где $\Delta_t \varphi(0) = \Delta_t(t) \varphi(0) = \varphi(t) - \varphi(0)$, $\Delta_{t^{1/2}} u^{(\sigma)}(0) = \Delta_x(t^{1/2}) u^{(\sigma)}(0)$, K_σ – константа согласования порядка σ . Для $\sigma \notin \mathbb{Z}$ полагаем $K_\sigma = 0$.

Теорема 1. Пусть m – натуральное число, $f \in H_m(\bar{D}_+)$, начальная функция $\psi \in H_{m+2}(\mathbb{R}_+)$, граничная функция $\varphi \in H_{m+1}(\Sigma)$ и выполнены условия согласования порядка $(m+1)/2$. Тогда ограниченное классическое решение и третьей краевой задачи (1) принадлежит $H_{m+2}(\bar{D}_+)$ и справедливо неравенство

$$|u|_{m+2, D_+} \leq C (|f|_{m, D_+} + |\psi|_{m+2, \mathbb{R}_+} + |\varphi|_{m+1, \Sigma} + K_{(m+1)/2}).$$

Для уравнения теплопроводности разрешимость третьей краевой задачи в пространствах Зигмунда $H_m(\bar{D}_+)$, $m \geq 2$ в модельном случае установлена в [2].

Список литературы

- [1] Эйдельман С.Д. *Параболические системы*. Наука, М: 1964.
- [2] Коненков А.Н. *Решение модельных задач теплопроводности в пространствах Зигмунда*. Дифференциальные уравнения, 44 (2008), 1388-1398.

О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ СНИЗУ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ПРИ НЕКОТОРЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО УСЛОВИЯ

ЕЖАК С.С.^{1,a}, ТЕЛЬНОВА М.Ю.^{1,b}

¹Российский экономический университет им. Г.В.Плеханова, Россия

^aEzhak.SS@rea.ru, ^bmytelnova@yandex.ru

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля

$$y'' + Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ неотрицательных локально интегрируемых на $(0, 1)$ функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x) dx = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0, \quad (3)$$

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < \infty. \quad (4)$$

Данная работа является продолжением изучения оценок для

$$m_{\alpha, \beta, \gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}} \lambda_1(Q), \quad M_{\alpha, \beta, \gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}} \lambda_1(Q),$$

начало которого было положено для подобной задачи в [1].

Доказано ([2]), что если условие (4) не выполняется, то ни для какого действительного λ не существует нетривиального решения y задачи (1), (2).

Доказано ([2], [3]), что при $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ и при $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ для любой функции $Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Q(x)y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}.$$

Теорема 1. При $\alpha, \beta \leq 1$ существует такая точка $x_0 \in (0, 1)$, что

$$m_{\alpha, \beta, 1} = m,$$

где m есть решение уравнения

$$\operatorname{tg} \sqrt{m}(1-x_0) = \frac{\sqrt{m} \sin \sqrt{m}x_0}{K \sin \sqrt{m}x_0 - \sqrt{m} \cos \sqrt{m}x_0},$$

причем $m_{\alpha, \beta, 1}$ достигается на потенциале $K\delta(x-x_0)$ и соответствующая собственная функция есть

$$y = \begin{cases} \frac{C\sqrt{m} \cos \sqrt{m}(1-x_0)}{\cos \sqrt{m}(\sqrt{m} \cos \sqrt{m}x_0 - K \sin \sqrt{m}x_0)} \sin \sqrt{m}x, & x \in [0, x_0], \\ \frac{-C \sin \sqrt{m}(1-x)}{\cos \sqrt{m}}, & x \in (x_0, 1], \end{cases}$$

где $K = x_0^{-\alpha}(1-x_0)^{-\beta}$ и C – произвольная константа; если $\alpha > 1$ или $\beta > 1$, то $m_{\alpha,\beta,1} = -\infty$.

Замечание 1. Если $\alpha, \beta \leq 0$, то $m_{\alpha,\beta,1} \geq \frac{3}{4}\pi^2$; если $\beta < 0 \leq \alpha \leq 1$ ($\alpha < 0 \leq \beta \leq 1$) или если $\alpha = \beta = 1$, то $m_{\alpha,\beta,1} \geq 0$; если $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ и при этом $\alpha \neq 1$ или $\beta \neq 1$, то $m_{\alpha,\beta,1} \geq \left(1 - \frac{(1-\alpha)^{1-\alpha}(1-\beta)^{1-\beta}}{(2-\alpha-\beta)^{2-\alpha-\beta}}\right) \cdot \pi^2 > 0$.

Список литературы

- [1] Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. *Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля*. Успехи математических наук, 51(3), (1996), 73–144.
- [2] Ezhak S., Telnova M. *On conditions on the potential in a Sturm–Liouville problem and an upper estimate of its first eigenvalue*. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 333, (2020), 481–496.
- [3] Ежак С.С., Тельнова М.Ю. *Об оценках снизу первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовыми интегральными условиями на потенциал*. Труды семинара имени И.Г. Петровского, 33, (2023), 144–160.
- [4] Karulina E., Vladimirov A. *The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extrema of the first eigenvalue*. Tatra Mountains Mathematical Publications, 54, (2013), 101–118.

УСРЕДНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ЛЕВИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ЖИЖИНА Е.А.^{1,a}, ПЯТНИЦКИЙ А.Л.^{1,b}, СЛОУЩ В.А.^{2,c},
СУСЛИНА Т.А.^{2,d}

¹Высшая школа современной математики МФТИ, Россия

²Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

^aelena.jijina@gmail.com, ^bapiatnitski@gmail.com, ^cv.slouzh@spbu.ru,

^dt.suslina@spbu.ru

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается нелокальный оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, формально заданный соотношением

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) \frac{(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} d\mathbf{y}, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Предполагается, что $\mu \in L_\infty(\mathbb{R}^{2d})$ и

$$\begin{aligned} 0 < \mu_- \leq \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mu_+ < \infty, \quad \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d; \\ \mu(\mathbf{x} + \mathbf{m}, \mathbf{y} + \mathbf{n}) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned} \quad (1)$$

Точное определение: $\mathbb{A}_\varepsilon$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный замкнутой неотрицательной формой

$$a_\varepsilon[u, u] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d).$$

В 2019 г. Кассманн, Пятницкий и Жижина показали, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ резольвента $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сильно сходится к оператору $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$. Здесь $\mathbb{A}^0$ — эффективный оператор того же вида, что $\mathbb{A}_\varepsilon$, с постоянным коэффициентом

$$\mu^0 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad \Omega = (0, 1)^d.$$

Имеем $\mathbb{A}^0 = c_0(d, \alpha) \mu^0 (-\Delta)^{\alpha/2}$, $\text{Dom } \mathbb{A}^0 = H^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

Мы доказываем, что резольвента $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 1. При условии (1) и $0 < \alpha < 2$ справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C \begin{cases} \varepsilon^\alpha, & 0 < \alpha < 1, \\ \varepsilon(1 + |\log \varepsilon|)^2, & \alpha = 1, \\ \varepsilon^{2-\alpha}, & 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

При $0 < \alpha < 1$ приближение оптимально. При $1 < \alpha < 2$ мы улучшаем точность приближения за счет учета корректоров.

Введем решения вспомогательных задач. Пусть v_j — периодическая функция класса $H_{\text{loc}}^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d)$ с нулевым средним и выполнено тождество

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \frac{\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} (v_j(\mathbf{x}) - v_j(\mathbf{y}) + x_j - y_j)(\overline{\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})}) = 0$$

при φ из того же класса. Положим $\mu_*(\mathbf{z}) := \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{z}) d\mathbf{x} - \mu^0$ и определим $(d \times d)$ -матрицу g с элементами

$$g_{lj} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega + \mathbf{n}} \mu_*(\mathbf{z}) \frac{z_l z_j}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z} + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \frac{\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} ((x_l - y_l)(v_j(\mathbf{x}) - v_j(\mathbf{y})) + (x_j - y_j)(v_l(\mathbf{x}) - v_l(\mathbf{y}))).$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие (1) и $k \in \mathbb{N}$, $2 - \frac{1}{k} < \alpha < 2$. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} - \sum_{m=1}^k \varepsilon^{m(2-\alpha)} \mathbb{K}_m \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C \begin{cases} \varepsilon, & 2 - \frac{1}{k} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{k+1}, \\ \varepsilon^{(k+1)(2-\alpha)}, & 2 - \frac{1}{k+1} < \alpha < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $\mathbb{K}_m = (\operatorname{div} g \nabla)^m (\mathbb{A}^0 + I)^{-m-1}$, а матрица g определена выше.

Исследование В.А. Слоуща и Т.А. Суслиной поддержано РНФ (грант № 22-11-00092-П).

ЭТА-ИНВАРИАНТЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ПАРАМЕТРОМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДЕЙСТВИЕМ ДИСКРЕТНОЙ ГРУППЫ

ЖУЙКОВ К.Н.^{1,a}, САВИН А.Ю.^{1,b}

¹РУДН, Москва

^azhuykovcon@gmail.com, ^ba.yu.savin@gmail.com

Атья, Патоди и Зингер определили η -инвариант эллиптического самосопряженного оператора на гладком замкнутом многообразии как регуляризацию типа ζ -функции величины, равной разности числа положительных и отрицательных собственных значений оператора. Определенный таким образом инвариант является спектральным инвариантом и возник в цитированной работе как вклад бесконечности в формулу индекса операторов типа Дирака на многообразиях с цилиндрическими концами.

Много работ посвящено обобщениям и приложениям η -инвариантов в разных геометрических ситуациях. Мельроуз определил η -инварианты для эллиптических операторов с параметром в смысле Аграновича и Вишика. При этом подходе η -инвариант определяется как регуляризация числа вращения семейства. Было показано, что η -инвариант Атьи-Патоди-Зингера является частным случаем η -инварианта Мельроуза. Отметим, что η -инвариант операторов с параметром описывает вклад конической точки в формулу индекса общих эллиптических операторов на многообразиях с коническими точками.

В некоммутативной геометрии и теории нелокальных задач важную роль играет класс операторов, ассоциированных с действием группы на многообразии. Более точно, для действия группы Γ на многообразии X рассматриваются операторы вида линейной комбинации

$$D = \sum_{\gamma \in \Gamma} D_{\gamma} T_{\gamma} : C^{\infty}(X) \rightarrow C^{\infty}(X)$$

операторов сдвига $(T_{\gamma}u)(x) = u(\gamma^{-1}(x))$, индуцированных действием группы, с коэффициентами — псевдодифференциальными операторами D_{γ} . Операторы такого вида будем для краткости называть Γ -операторами.

Проблема, исследуемая в данной работе, состоит в том, чтобы изучить η -инварианты Γ -операторов, где коэффициенты D_γ являются операторами с параметром. Эту проблему удалось решить в следующей ситуации: группа Γ является группой степенного роста; она действует изометрически на многообразии; в качестве коэффициентов D_γ допускаются элементы из алгебры операторов с параметром, порожденной классическими псевдодифференциальными операторами с параметром и операторами умножения на периодические функции (элементы этой алгебры мы называем операторами с параметром и периодическими коэффициентами). Отметим, что операторы с параметром такого типа возникают при исследовании нелокальных задач на многообразиях с коническими точками и на многообразиях с цилиндрическими концами.

Список литературы

- [1] Жуйков К.Н., Савин А.Ю. *Эта-инварианты для операторов с параметром, ассоциированных с действием дискретной группы*. Матем. заметки, 112(5) (2022), 705-717.

О ПОРЯДКОВЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

ЖУКОВСКИЙ Е.С.^{1,a}, ПАТРИНА А.С.^{1,b}

¹Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, Россия

^azukovskys@mail.ru, ^blanina.anastasiia5@mail.ru

Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $i = \overline{1, n}$ будем обозначать через $x_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$ вектор, полученный из x удалением компоненты x_i , а исходный вектор будем обозначать через $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_i, x_{-i})$. Определим класс $\mathcal{K}^r$ функций $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot, x)$ измерима (по Лебегу), а при п.в. $t \in \mathbb{R}_+$, любых $i = \overline{1, n}$ и $x_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$ функция $f(t, \cdot, x_{-i})$ непрерывна справа и (нестрого) возрастает. Через L^n и AC^n обозначаем пространства суммируемых и абсолютно непрерывных функций $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с «обычным» порядком. Пусть заданы диагональные матрицы $\beta = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ и $p = \text{diag}\{p_1, \dots, p_n\}$, где $\beta_i \in \mathbb{R}$, $p_i \in L^1$, $i = \overline{1, n}$.

Исследуется устойчивость множества решений краевой задачи

$$\mathcal{L}x := \dot{x} - p(t)x = f_0(t, x), \quad t \in [0, T], \quad lx := x(0) - \beta x(T) = \gamma_0, \quad (1)$$

к возмущениям правой части $f_0 \in \mathfrak{R}^r$ дифференциального уравнения и значения $\gamma_0 \in \mathbb{R}^n$ краевых условий. Решение x ищется в AC^n , поэтому $\mathcal{L}x \in L^n$. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество решений задачи (1) и $\mathcal{LR} := \{y \in L^n : y = \mathcal{L}x, x \in \mathcal{R}\}$. Дифференциальные уравнения с правой частью из класса $\mathfrak{R}^r$ возникают, в частности, в моделях электрической активности мозга типа Хопфилда с разрывной функцией активации нейронов (см. [1, 2]). Описание некоторых режимов активности мозга в таких моделях приводит к задаче (1) (см. [3]).

Пусть заданы две убывающие последовательности $\{\gamma_k\} \subset \mathbb{R}^n$ и $\{f_k\} \subset \mathfrak{R}^r$ такие, что $\gamma_0 = \inf\{\gamma_k\}$, и если убывающая последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ имеет $x := \inf\{x_k\}$, то $f(\cdot, x) = \inf\{f_k(\cdot, x_k)\}$. Для $k = 1, 2, \dots$ обозначим через $\mathcal{R}_k \subset AC^n$ множество решений задачи

$$\mathcal{L}x = f_k(t, x), \quad t \in [0, T], \quad lx = \gamma_k,$$

соответственно, $\mathcal{LR}_k := \{y \in L^n : y = \mathcal{L}x, x \in \mathcal{R}_k\}$.

Пусть существуют $v, w \in AC^n$, удовлетворяющие неравенствам

$$\mathcal{L}v \leq f_0(\cdot, v(\cdot)) \leq f_1(\cdot, w(\cdot)) \leq \mathcal{L}w, \quad lv \leq \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq lw.$$

Положим $I := \{x \in AC^n : v \leq x \leq w\}$, $\mathcal{LI} := \{y \in L^n : \mathcal{L}v \leq y \leq \mathcal{L}w\}$.

Теорема 1. Пусть $\beta_i \exp(\int_0^T p_i(t)dt) < 1$, $i = \overline{1, n}$. Тогда

1) при любом $k = 0, 1, \dots$ множество $\mathcal{LR}_k \cap \mathcal{LI}$ не пусто, в нем существуют наибольший и наименьший элементы;

2) для любого $k_0 = 1, 2, \dots$ и любого $y \in \mathcal{LR}_{k_0} \cap \mathcal{LI}$ при каждом $k = 1, 2, \dots$ существует $y_k \in \mathcal{LR}_k \cap \mathcal{LI}$ такое, что последовательность $\{y_k\}$ убывает и $y_{k_0} = y$;

3) для любой убывающей последовательности $\{y_k\}$ с элементами $y_k \in \mathcal{LR}_k \cap \mathcal{LI}$, $k = 1, 2, \dots$, существует $y_0 = \inf\{y_k\}$ и $y_0 \in \mathcal{LR}_0 \cap \mathcal{LI}$;

4) если $\bar{y}_k$ — наибольший в $\mathcal{LR}_k \cap \mathcal{LI}$ элемент, $k = 1, 2, \dots$, то последовательность $\{\bar{y}_k\}$ убывает и $\bar{y}_0 = \inf\{\bar{y}_k\}$ является наибольшим в $\mathcal{LR}_0 \cap I$ элементом.

Аналогичными установленным в теореме 1 для последовательности множеств $\mathcal{LR}_k \cap \mathcal{LI}$ порядковыми свойствами обладает также и последовательность множеств $\mathcal{R}_k \cap I$.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 24-21-00272, <https://rscf.ru/project/24-21-00272/>.

Список литературы

- [1] Hopfield J.J. *Neural networks and physical systems with emergent collective computational properties*. Proc. Nat. Acad. Sci., 79 (1982), 2554-2558.
- [2] Burlakov E., Ponomov A., Wyller J. *Stationary solutions of continuous and discontinuous neural field equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 444 (2016), 47-68.
- [3] Патрина А.С. *О краевой задаче для системы дифференциальных уравнений, моделирующей электрическую активность головного мозга*. Вестник российских университетов. Математика, 28:144 (2023), 383 - 394.

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

ЗАЙЦЕВА Н.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Россия
zaitseva@cs.msu.ru

Пусть $D = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ и $\overline{D} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ — области координатной плоскости Oxt .

Исследован вопрос существования и единственности классического решения следующей задачи: требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x, t) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}),$$

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) + b u(x - h, t) = 0, \quad (x, t) \in D,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $a > 0$, $b, h \neq 0$ — заданные действительные числа, начальные функции $\varphi(x) \in C^2(D)$ и $\psi(x) \in C^1(D)$.

Решение задачи построено в явном виде. Доказано, что классическое решение задачи существует, если вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора в уравнении положительна, что говорит, согласно теории дифференциально-разностных уравнений [1], об эллиптичности указанного оператора.

Получены достаточные условия на коэффициенты и сдвиг уравнения, гарантирующие существование классического решения задачи.

Список литературы

- [1] Skubachevskii A.L. *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin: 1997.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЗАКОРА Д.А.

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Россия
dmitry.zkr@gmail.com

В гильбертовом пространстве H рассматриваются начальные задачи для следующих дифференциально операторных уравнений:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -A \frac{du}{dt} - Bu + \int_0^t K(t-s)u(s) ds + g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad (1)$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -Au + \int_0^t K(t-s)u(s) ds + g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad (2)$$

где $K(t) := C^* \exp(-Gt)C$, $\sigma_0 = 0$, $0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, n$). Здесь A , B , G — самосопряженные положительно определенные операторы, C — плотно определенный замкнутый оператор. Операторные коэффициенты подчинены определенным условиям.

Найдены достаточные условия однозначной разрешимости исследуемых задач Коши, получены асимптотические при $t \rightarrow +\infty$ формулы для решений. Исследование для уравнения (1) проведено в [1].

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2025-1543.

Список литературы

- [1] Загора Д. А. *Асимптотическое поведение решений полного интегро-дифференциального уравнения второго порядка*. Современная математика. Фундаментальные направления, 68(3) (2022), 451-466.

КОРРЕКТНОСТЬ ОДНОЙ АЛЬФА-МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ С ПАМЯТЬЮ

ЗВЯГИН А.В.^{1,a}, СТРУКОВ М.И.^{1,b}

¹Воронежский государственный университет, Россия

^azvyagin.a@mail.ru, ^bmixail.strukov12@gmail.com

В ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с достаточно гладкой границей на временном интервале $[0, T]$, $T > 0$ рассматривается начально-краевая задача (см. [1]–[3]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\mu_1 \operatorname{Div} \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \right) - \\ - 2\mu_1 \operatorname{Div} \left(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho \mathcal{E}(v) \right) - \\ - \frac{\mu_2}{\Gamma(1-\lambda)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\lambda} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = f, \end{aligned} \quad (1)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$v = (I - \alpha^2 \Delta)u, \quad \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$v|_{t=0} = v_0, \quad v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Здесь $v(x, t)$ — вектор-функция скорости, u — вектор-функция модифицированной скорости, $p(x, t)$ — функция давления, $f(x, t)$ — функция плотности внешних сил, $z(\tau, t, x)$ — траектория частицы среды, $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij}(v))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор скоростей деформаций, $W(v) = (W_{ij}(v))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$, $W_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор завихренности, $W_\rho(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x - y) W(y) dy$, где $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ —

гладкая функция с компактным носителем, такая что $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами, $\mu_0, \mu_1, \alpha > 0$, $\mu_2 \geq 0$ — некоторые константы.

Определение 1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^1$. Слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4) называется функция $v \in W$, $W = \{v : v \in L_\infty(0, T, V^1), v' \in L_2(0, T, V^1)\}$, удовлетворяющая при любом $\varphi \in V^3$ и при почти всех $t \in (0, T)$ равенству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ & + \mu_1 \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) : \nabla \varphi dx - \mu_1 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \\ & - \mu_1 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \\ & + 2\mu_1 \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi dx + \\ & + \frac{\mu_2}{\Gamma(1-\lambda)} \left(\int_0^t (t-s)^{-\lambda} \mathcal{E}(v)(s, z(v)(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Теорема 1. Предположим, что $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Тогда начально-краевая задача (1)–(4) имеет хотя бы одно слабое решение $v \in W$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10026, <https://rscf.ru/project/23-71-10026/>

Список литературы

- [1] Звягин А.В., Струков М.И. О слабой разрешимости математической модели движения растворов полимеров, учитывающей память среды. Дифференциальные уравнения. — 2024. — Т. 60, Н. 10. — С. 1422–1428.
- [2] Звягин А.В. Исследование разрешимости термовязкоупругой модели, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров. Сибирский математический журнал. — 2018. — Т. 59, Н. 5. — С. 1066–1085.

- [3] Zvyagin A.V. *Attractors for model of polymer solutions motion*. Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2018. — V. 38, N. 12. — P. 6305–6325.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ И МОДЕЛЕЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ С ПОМОЩЬЮ ПРЯМОЙ СИСТЕМЫ КОЛМОГОРОВА

ЗЕЙФМАН А.И.

Вологодский государственный университет, Россия
a_zeifman@mail.ru

Рассматривается (конечная или счетная) марковская цепь с непрерывным временем, в предположении, что поведение вероятностей состояний этой цепи можно описать прямой системой Колмогорова,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}, \quad (1)$$

где так называемая инфинитезимальная матрица $A(t)$ с локально интегрируемыми на $[0, \infty)$ коэффициентами существенно неотрицательна, а сумма элементов по каждому столбцу равна нулю, и кроме того, предполагается выполненным условие ограниченности: $|a_{ii}(t)| \leq L < \infty$ при всех i и почти при всех $t \geq 0$, гарантирующее возможность применения результатов из [3].

Описываются основные классы марковских цепей, допускающие получение точных оценок скорости сходимости к предельному режиму, устойчивости по отношению к малым изменениям инфинитезимальных характеристик. В частности, практически полное исследование удается провести для так называемых процессов рождения и гибели, для которых матрица $A(t)$ – трехдиагональная. Соответствующие однородные процессы (то есть в случае A не зависит от времени) возникли впервые при описании биологических задач, а затем задач, связанных с теорией массового обслуживания, см. [1], исследования неавтономной системы (1) для конкретных моделей начались в 1970-х годах, см., например, [2, 5], и активно продолжаются и сейчас, см. [4].

Основные прикладные задачи в настоящее время связаны с оценками и построением предельных характеристик соответствующих моделей.

В докладе будут описаны несколько новых подходов, основанных на специальных преобразованиях системы (1), а затем исследовании преобразованной системы в соответствующим образом подобранных "весовых" пространствах последовательностей. Сформулированы основные понятия и результаты из [10], опирающиеся также на исследования [6, 7, 8, 9].

Настоящая работа выполнена совместно с Я. А. Сатиным, В. Ю. Королевым и И. А. Усовым.

Список литературы

- [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. *Введение в теорию массового обслуживания*. Наука, М.: 1987.
- [2] Гнеденко Б. В., Макаров И. П. *Свойства решений задачи с потерями в случае периодичности интенсивностей*. Дифф. уравнения, 9 (1971), 1696–1698.
- [3] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. Наука, М.: 1970.
- [4] Giorno V., Nobile A. G. *On a class of birth-death processes with time-varying intensity functions*. Appl. Math. Comp. 379 (2020) , 125255.
- [5] Gnedenko B., Soloviev A. *On the conditions of the existence of final probabilities for a Markov process*. Math. Operationsforsch. Statist, 4 (1973) 4, 379–390.
- [6] Usov I., Satin Y., Zeifman A. *Estimating the Rate of Convergence of the PH/M/1 Model by Reducing to Quasi-Birth-Death Processes*. Mathematics, 11 (2023), 1494.
- [7] Zeifman A., Satin Y., Korolev V., Shorgin S. *On Truncation for Weakly Ergodic Inhomogeneous Birth and Death Processes*. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci, 24 (2014), 503–518.
- [8] Zeifman A., Korolev V., Satin Y. *Two approaches to the construction of perturbation bounds for continuous-time Markov chains*. Mathematics, 8 (2020), 253.
- [9] Zeifman A. I., Razumchik R. V., Satin Y. A., Kovalev I. A. *Ergodicity bounds for the Markovian queue with time-varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy*. Appl. Math. Comp. 395 (2021), 125846.
- [10] Zeifman A., Satin Y., Korolev V., Usov I. *Continuous-time Markov chains and models: Bounding via forward Kolmogorov system*, in: Handbook of Statistics, Elsevier, 52 (2025), 179–210. .

О НАЗНАЧЕНИИ СПЕКТРА ДЛЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ВЫХОДОМ И ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

ЗУБОВА С.П.^{1,a}, РАЕЦКАЯ Е.В.^{2,b}

¹Воронежский государственный университет, Россия

²Воронежский лесо-технический университет имени Морозова Г.Ф., Россия

^aspzubova@mail.ru, ^braetskaya@inbox.ru

Рассматривается полностью управляемая динамическая система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \dot{(\cdot)} = \frac{d(\cdot)}{dt}, \quad t \in [t_0, t_k], \quad (1)$$

с выходом

$$y = Cx \quad (2)$$

и обратной связью

$$u = Ky, \quad (3)$$

где заданы $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, $\nexists B^{-1}$.

Из (1), (2), (3) следует:

$$\dot{x} = (A + BKC)x.$$

Для решения задачи назначения спектра (управления спектром) для произвольно заданного набора чисел $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ требуется построить матрицу K такую, чтобы спектр матрицы $A + BKC$ совпал с $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ [1].

В случае $C = I$ задача назначения спектра решена в [2].

В докладе рассматривается случай $C \neq I$ и μ_j — не равные между собой числа, и если комплексные, то попарно сопряженные.

От равенства

$$(A + BKC)v = \lambda v$$

совершается переход к эквивалентной системе

$$KCv = f, \quad (4)$$

$$f = B^-(\lambda I - A)v + z, \quad \forall z \in \text{Ker} B, \quad (5)$$

$$Q(\lambda I - A)v = 0, \quad (6)$$

где Q — проектор на $\text{Coker } B$, отвечающий разложению

$$\mathbb{R}^m = \text{Coim} B \dot{+} \text{Ker} B, \quad \mathbb{R}^n = \text{Im} B \dot{+} \text{Coker} B.$$

В [2] доказано, что если пара (A, B) управляемая, то из (6) находятся n линейно независимых векторов $v = v(\mu_j)$, что дает возможность найти f из (5) и перейти к (4) при $C = I$ для построения K .

При $C \neq I$ в системе (4) для нахождения коэффициентов матрицы K лишь l линейно независимых векторов $v = v(\mu_j)$, $j = 1, 2, \dots, l$.

Лемма 1. *Если решение $v = v(\lambda)$ уравнения (6) не содержит произвольных параметров ($\neq \lambda$), то лишь l любых чисел из набора $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ могут быть собственными числами матрицы $A + BKC$.*

Замечание 1. В других случаях матрица $A + BKC$ может иметь больше, чем l собственных чисел, или даже n чисел из произвольного набора $\{\mu_j\}_{j=1}^n$.

Теорема 1. *Для произвольного набора $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ существует матрица G такая, что спектр матрицы $A + G + BKC$ совпадает с $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ и пара $(A + G, B)$ управляемая.*

Дается метод построения G . Приводится пример построения G для двухзвенного манипулятора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-20012).

Список литературы

- [1] Шумафов М.М. *Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор* // Вестник СПбГУ. Математика. Астрономия. Т. 6(64). Вып. 4 (2019) С. 564–591.
- [2] Зубова С.П., Раецкая Е.В. *Решение задачи размещения спектра для линейной системы управления, замкнутой обратной связью* // Дифф. ур-ния. Т. 6, № 6 (2024) 798-816.
- [3] Зубова С.П., Раецкая Е.В. *Алгоритм решения линейных многоточечных задач управления методом каскадной декомпозиции* // Автоматика и телемеханика. Т. 59, № 3 (2017) С. 22–39.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛОКАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ОКРЕСТНОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЛЬИН Ю.А.

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Россия
iljin_y_a@mail.ru

Рассматривается существенно нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x, y), \quad \dot{y} = Y(t, x, y), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q$, в окрестности нулевого решения $x = 0, y = 0$. Предполагается, что функции X, Y при $t \in \mathbb{R}$ и $\|(x, y)\| \leq r$ непрерывны по своим аргументам, непрерывно дифференцируемы по x и y , и удовлетворяют следующим условиям

$$\|X'_x\| \leq c_1 \|(x, y)\|^k, \quad \|X'_y\| \leq c_2 \|(x, y)\|^k, \quad \|Y'_x\| \leq c_4 \|(x, y)\|^k, \\ \gamma_*(Y'_y(t, x, y)) \geq \sigma \|y\|^k - c_3 \|x\|^k,$$

где γ_* —так называемая *нижняя логарифмическая норма* матрицы (см. [2]), число $k > 0$ характеризует порядок нелинейности системы, а константы $\sigma > 0, c_{1,2,3,4} \geq 0$ удовлетворяют неравенству

$$\sigma d > c_1 + c_2 + c_3 + c_4,$$

в котором число d задается формулой

$$d = \min\left\{\int_0^1 \|su + (1-s)v\|^k ds \mid \|u\| = 1, \|v\| \leq 1\right\}.$$

Термин *существенно нелинейная* означает, что система (1) имеет нулевое линейное приближение, т.е. разложения функций X, Y в окрестности нуля по формуле Тейлора начинается со слагаемых порядка $k+1$. К таким системам неприменимы обычные теоремы существования локально-интегральных многообразий, существенным образом использующие наличие «хорошего» линейного приближения. Введем множество $H = \{(t, x, y) \mid t \in \mathbb{R}, \|x\| \leq \|y\| \leq r\}$.

Теорема 1. При сделанных предположениях система (1) обладает единственной интегральной поверхностью, располагающейся в H и представимой в виде $x = h(t, y)$, где $h : \{(t, y) \mid t \in \mathbb{R}, \|y\| \leq r\} \mapsto \mathbb{R}^p$ непрерывна по своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица по y

$$\|h(t, y_1) - h(t, y_2)\| \leq \|y_1 - y_2\|.$$

Любое решение $z(t) = (x(t), y(t))$, располагающееся на поверхности h , при $t \rightarrow -\infty$ стремится к $(0, 0)$ так, что выполняется оценка

$$\|z(t)\| \leq \|z(t_0)\| \left(1 - k \left(\frac{\sigma}{k+1} - c_4 \right) \|z(t_0)\|^k (t - t_0) \right)^{-1/k}$$

Решение, начинающееся в H и не лежащее на поверхности h , с убыванием t обязательно покидает H . Если система (1) была ω -периодической по t , то и функция h будет ω -периодической по t . Если система (1) была автономной, то h будет не зависеть от t .

В предыдущих работах автора (см. обзор в [1, 2, 3]) всегда предполагалось, что разложение функций X, Y по формуле Тейлора имеет вид

$$X(t, x, y) = U(t, x) + P(t, x, y), \quad Y(t, x, y) = V(t, x) + Q(t, x, y),$$

т.е. что система первого приближения к (1) имеет блочно-диагональный вид. В данной работе удалось отказаться от этого предположения.

Список литературы

- [1] Ильин Ю.А. Аналог теоремы Ляпунова-Перрона для существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений. Вестн. Ленингр. ун-та., Сер. 1, вып.1, №1, 118–119 (1991).
- [2] Ильин Ю.А. О существовании локально-интегральной поверхности нейтрального типа у существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений. Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1., Вып.1, 43–54 (2007).
- [3] P'in Yu. Existence of an Invariant Foliation Near a Locally Integral Surface of Neutral Type. Lobachevskii Journal of Mathematics. V. 43, No. 2, 378–390 (2022).

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С БЕСКОНЕЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

ИСКАКОВ Т.К.

Новосибирский государственный университет, Россия
istima92@mail.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t - \tau)) = A(t)y(t) + \int_{-\infty}^t B(t, t-s)y(s)ds + F(t, y(t)), \quad (1)$$

где $D(t)$ — матрица размера $(n \times n)$ с непрерывно дифференцируемыми, вещественнозначными, T -периодическими элементами, $A(t)$ — матрица размера $(n \times n)$ с непрерывными, вещественнозначными, T -периодическими элементами, $B(t, s)$ — матрица размера $(n \times n)$ с непрерывными, вещественнозначными, T -периодическими по первой переменной элементами, т.е.

$$D(t) \equiv D(t + T), \quad A(t) \equiv A(t + T), \quad B(t, s) \equiv B(t + T, s),$$

$F(t, u)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция. Предполагается, что $F(t, u)$ является локально липшицева относительно переменной u и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t, u)\| \leq q\|u\|^{1+\omega},$$

$q \geq 0$, $\omega > 0$ — постоянные.

Для исследования устойчивости нулевого решения системы (1) используется функционал Ляпунова – Красовского, предложенный в [2]:

$$v(t, y) = \langle H(t)(y(t) + D(t)y(t - \tau)), (y(t) + D(t)y(t - \tau)) \rangle + \int_{t-\tau}^t \langle M(t-s, s)y(s), y(s) \rangle ds + \int_0^\infty \int_{t-\eta}^t \langle K(t-s, \eta)y(s), y(s) \rangle ds d\eta.$$

Данный функционал является аналогом функционала Ляпунова – Красовского из [1].

Используя предложенный функционал, были получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1) в терминах матричных и интегральных неравенств, установлены оценки норм решений, которые характеризуют убывание на бесконечности и оценки на множество притяжения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00367, <https://rscf.ru/project/24-21-00367/>

Список литературы

- [1] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, 5:3 (2005), 20-28.
- [2] Исаков Т.К. *Устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с бесконечным распределенным запаздыванием*. Челябин. физ.-матем. журн., 9:4 (2024), 573–584.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

КАБАНИХИН С.И.^{1,a}, ШИШЛЕНИН М.А.^{1,b}

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

^aksi52@mail.ru, ^bm.a.shishlenin@mail.ru

Прямые и обратные задачи для волновых процессов являются важным инструментом исследования природы.

Многие обратные задачи для гиперболических уравнений могут быть сведены к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра и записаны в общем виде

$$q(x) = f(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S, \quad S = [0, T], \quad T \in \mathbb{R}_+.$$

$\{K_x\}_{x \in S}$ представляет собой семейство нелинейных операторов Вольтерра, (векторная) функция $q(x)$ представляет неизвестный коэффициент (или коэффициенты), а $f(x)$ — данные обратной задачи.

Разработаны прямые и итерационные методы решения коэффициентных обратных задач восстановления акустических параметров среды по дополнительной информации о решении прямой задачи, измеряемой на границе исследуемой среды [2].

Разработана математическая модель акустической медицинской томографии [1]. Исследована постановка обратной задачи акустики по определению параметров среды по измерениям, сделанных на границе исследуемой области. Один из методов основан на сведении обратной задачи к задаче минимизации целевого функционала методом градиентного спуска и разработан метод оптимизации вычислительных ресурсов [3]. Проведен сравнительный анализ разработанных численных методов с методами на основе технологий глубокого обучения.

Исследована интегральная постановка прямой задачи, доказано существование единственного решения “в целом” в L_2 и непрерывная зависимость решения от начальных данных [6, 7].

Также представлено несколько классических и новых методов устойчивости и регуляризации нелинейных операторных уравнений Вольтерра, в том числе методы Тихонова-Лаврентьева-Иванова [4], Хайерса-Улама-Рассиаса [5] и подходы к машинному обучению. Будет рассмотрено применение к обратным гиперболическим задачам и нелинейным уравнениям Шредингера.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 24-41-04004 “Идентификация и исследование математических моделей в науке и индустрии — регуляризация и машинное обучение”.

Список литературы

- [1] Kabanikhin S.I., Klyuchinskiy D.V., Novikov N.S., Shishlenin M.A., *Numerics of acoustical 2D tomography based on the conservation laws*. Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 28:2, (2020), 287–297.
- [2] Klyuchinskiy D.V., Novikov N.S., Shishlenin M.A., *Recovering Density and Speed of Sound Coefficients in the 2D Hyperbolic System of Acoustic Equations of the First Order by a Finite Number of Observations*. Mathematics, 9:2, (2021), 199.

- [3] Klyuchinskiy D.V., Novikov N.S., Shishlenin M.A. (2021) CPU-time and RAM memory optimization for solving dynamic inverse problems using gradient-based approach. Journal of Computational Physics. Vol. 439, 110374.
- [4] Kabanikhin S., *Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications*, De Gruyter, Germany, (2011).
- [5] Reinfelds A. , Christian S. *Hyers-Ulam Stability of Volterra Type Integral Equations on Time Scales*, Advances in Dynamical Systems and Applications, 15, No. 1, 39–48 (2020).
- [6] Кабанихин С.И. *Конечно-разностная регуляризация обратной задачи для уравнения колебаний*, в кн.: Вопросы корректности в задачах математической физики. Новосибирск. 1977. стр. 57–69.
- [7] Kabanikhin S.I. *Regularization of Volterra operator equations of the first kind with a boundedly Lipschitz-continuous kernel*. Soviet Math. Dokl. 1989. 39(3), 549–552.

ЗАДАЧА УСРЕДНЕНИЯ В ОБЛАСТИ ТИПА СИТА НЕЙМАНА С “ЛЕГКИМИ” КОНЦЕНТРИРОВАННЫМИ МАССАМИ

КАЛЯЕВ Т.Д.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
timur.kalyayev@gmail.com

В данной работе мы изучаем задачу о «легких» концентрированных массах в области типа сита Неймана. Область с периодической структурой Ω_ϵ задается уравнениями:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0; a), x_2 \in (0; \gamma_1(x_1))\}, \\ \Gamma_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \gamma_1(x_1); x_1 \in [0; a]\}, \\ \Omega_{1,\epsilon} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0; a), x_2 \in (\gamma_2(x_1); -\epsilon l)\}, \\ G_j(\epsilon) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - \epsilon(j + \frac{1}{2})| < \frac{\epsilon h}{2}; x_2 \in [-\epsilon l; 0]\}, \\ G_\epsilon &= \bigcup_{j=0}^{N-1} G_j(\epsilon) \quad \Omega_\epsilon = \Omega_0 \cup \Omega_{1,\epsilon} \cup G_\epsilon,\end{aligned}$$

где $a, h, l \in \mathbb{R}$, $0 < h < 1$ и $N \in \mathbb{N}$, а также $\epsilon = \frac{a}{N}$.

Также вводятся вспомогательные обозначения для остальной границы области:

$$\gamma_{\parallel, \epsilon} = \partial G_\epsilon \cap \{x_2 = (-\epsilon l; 0)\}, \quad \gamma_{=, \epsilon} = \partial \Omega_\epsilon \cap (\{x_2 = 0\} \cup \{x_2 = -\epsilon l\}),$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_\epsilon &= \gamma_{\parallel, \epsilon} \cup \gamma_{=, \epsilon}, & \Gamma_{2, \epsilon} &= \Omega_\epsilon \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_\epsilon) \\
I_0 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [0; a]; x_2 = 0\}, \\
I_{0, \epsilon} &= \{x \in (\partial\Omega_0 \setminus (\partial G_\epsilon \cup \Gamma_1)) \cap \{x_2 = 0\}\}, \\
I_{l, \epsilon} &= \{x \in (\partial\Omega_{1, \epsilon} \setminus \partial G_\epsilon) \cap \{x_2 = -\epsilon l\}\}.
\end{aligned}$$

Мы исследуем следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases}
-\Delta_x u(\epsilon, x) = \lambda(\epsilon) \rho_\epsilon(x) u(\epsilon, x), & x \in \Omega_\epsilon, \\
-\partial_\nu u(\epsilon, x) = 0, & x \in \partial\Omega_\epsilon \setminus \Gamma_1, \\
u(\epsilon, x) = 0, & x \in \Gamma_1, \\
[u] = [\partial_{x_2} u] = 0, & x \in G_\epsilon \cap (\{x_2 = 0\} \cup \{x_2 = -\epsilon l\}).
\end{cases}$$

Тут $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial \nu}$ внешняя нормальная производная. $\partial_{x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}$.

Квадратные скобки обозначают скачок функции, заключенной в них. Плотность $\rho_\epsilon(x)$ имеет вид

$$\rho_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_0 \cup \Omega_{1, \epsilon}, \\ \epsilon^{-\alpha}, & x \in G_\epsilon. \end{cases}$$

В рамках данного исследования мы рассматриваем два случая: $\alpha = 1$ и $\alpha \in (0, 1)$

Применяется метод согласования асимптотических разложений и для $\alpha = 1$ и $\alpha \in (0, 1)$ выводятся усредненные краевые задачи для ведущих членов асимптотического разложения собственных значений и собственных функций.

Список литературы

- [1] М.Е. Перес, Г.А. Чечкин, Е.И. Яблокова (Доронина). “О собственных колебаниях тела с “легкими” концентрированными массами на поверхности”, УМН **57**, No. 6, 195–196 (2002).
- [2] G.A. Chechkin, D.Cioranescu, A.Damlamian, A.L.Piatnitski, “On Boundary Value Problem with Singular Inhomogeneity Concentrated on the Boundary”, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **98**, No. 2, 115–138 (2012).
- [3] G.A. Chechkin, T.P. Chechkina, “Asymptotic Behavior of Spectrum of an Elliptic Problem in a Domain with Aperiodically Distributed Concentrated Masses (Jointly with)”, CR Mécanique **345**, No. 10, 671–677 (2017).
- [4] Г.А. Чечкин, “Расщепление кратного собственного значения в задаче о концентрированных массах”, УМН **59**, No. 4, 205–206 (2004).

- [5] Г.А. Чечкин, “Об оценке решений краевых задач в областях с концентрированными массами, периодически расположенными вдоль границы. Случай “легких” масс”, Мат. заметки **76**, No. 6, 928–944 (2004).
- [6] G.A. Chechkin, “On Vibration of Partially Fastened Membrane with Many “light” Concentrated Masses on the Boundary”, CR Mécanique **332**, No. 12, 949–954 (2004).
- [7] M. Lobo and M.E. Pérez, “Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary”, Math. Models Meth. Appl. Sci. **5**, No. 5, 565–585 (1995).

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С УСЛОВИЕМ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

КАМЫНИН В.Л.

Москва, Россия, Национальный исследовательский ядерный университет
«МИФИ»
vlkamynin2008@yandex.ru

В докладе изучается однозначная разрешимость обратных задач определения коэффициента перед u либо коэффициента перед u_x в параболическом уравнении при дополнительном условии

$$u(T, x) = \varphi(x), \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ – известная функция.

Именно, рассматривается обратная задача восстановления коэффициента $\gamma(x)$ в параболическом уравнении

$$\rho(t, x)u_t - \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(t, x)u + \gamma(x)u = f(t, x) \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$u(t, x)\Big|_{\Gamma} = \Psi(t, x)r\Big|_{\Gamma} \quad (3)$$

и дополнительным условием (1). Здесь $Q = [0, T] \times \bar{\Omega}$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, Γ – «параболическая» граница цилиндра Q .

Также рассматривается обратная задача восстановления коэффициента $b(x)$ в параболическом уравнении

$$\rho(t, x)u_t - u_{xx} + b(x)u_x + c(t, x)u = f(t, x) \quad (4)$$

с краевыми условиями (3) и дополнительным условием (1). В этой задаче $\Omega = (0, l)$ – отрезок в $\mathbb{R}^1$.

Коэффициент $\gamma(x)$ ищется в пространстве $L_\infty^+(\Omega)$, коэффициент $b(x)$ ищется в пространстве $L_\infty(0, l)$.

Установлены достаточные условия, при которых обратные задачи (2),(3),(1) и (4),(3),(1) однозначно разрешимы. Метод доказательства основан на сведении обратных задач к решению некоторых операторных уравнений

$$\gamma = \mathcal{A}(\gamma) \quad \text{и} \quad b = \mathcal{B}(b),$$

соответственно, изучении свойств операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, а также на использовании оценок в $L_\infty(Q)$ решений прямой задачи для функции u_t , которая получается формальным дифференцированием по t уравнений (2), (4) и краевых условий (3).

Похожий метод применялся рядом авторов при исследовании обратных задач восстановления неизвестной правой части параболического уравнения с дополнительным условием (1). В этой связи отметим раннюю работу автора [1].

Показано, что решение обратной задачи (4),(3),(1) существует для широкого класса входных данных. Требуются лишь некоторые минимальные условия их гладкости. Единственность решения обратной задачи (4),(3),(1), а также существование и единственность решения обратной задачи (2),(3),(1) получены при условии, что либо размер области Ω достаточно мал (T фиксировано), либо величина T достаточно велика (размер области Ω фиксирован). Приведены соответствующие примеры обратных задач.

Часть результатов опубликовано в недавней статье [2].

Работа выполнена при поддержке Программы Приоритет-2030 Национального исследовательского ядерного университета МИФИ.

Список литературы

- [1] Камынин В.Л. *Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболических уравнений с условием финального переопределения*. Матем. Заметки, 79 (2003) 217–227.
- [2] Камынин В.Л. *Об обратной задаче определения коэффициента поглощения в параболическом уравнении при условии финального наблюдения*. Вестник НИЯУ МИФИ, 13 (2024) 329–339.

РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА И СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

КАПЦОВ О.В.

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия
profkap@mail.ru

Рассматриваются двумерные стационарные уравнения идеальной жидкости

$$uu_x + vv_y + p_x/\rho = 0, \quad uv_x + vv_y + p_y/\rho = 0, \quad u_x + v_y = 0,$$

где u, v – компоненты вектора скорости, p – давление, ρ – плотность. Плотность жидкости считается постоянной и равной единице. Хорошо известно [1], что эта система сводится к одному уравнению

$$\Delta\psi = \omega(\psi)$$

на функцию тока ψ . Здесь ω – завихренность, Δ – двумерный оператор Лапласа, а $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$. Последнее уравнение также возникает в различных приложениях таких как физика плазмы, теория твердого тела [2, 3].

Данный доклад разделен на две части. В первой рассматриваются решения эллиптического уравнения Сине-Гордона

$$\Delta\psi = \sin(\psi). \tag{1}$$

и Sinh-Гордона. Решения уравнения Сине-Гордона представляются в виде

$$\psi = 4 \arctan \frac{G}{F},$$

где F и G – гладкие функции в плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$. Показано, что расход жидкости

$$Q \equiv \oint_{\gamma} d\psi$$

через простую замкнутую кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2(x, y)$ равен $8\pi I$, $I \in \mathbb{Z}$. Целое число I равно сумме индексов Пуанкаре нулевых точек векторного поля $V = (F, G)$, лежащих внутри кривой γ . Найдены точные решения уравнений $\sin$ -Гордона (1) и $\sinh$ -Гордона, выраженные в терминах элементарных функций. Эти решения определяют течения, состоящие из отдельных источников и стоков, струйные течения, периодические цепочки из источников-стоков, вихри и их комбинации. Во второй части предложен новый способ построения решений эллиптических уравнений Sine-Гордона, Sinh-Гордона и Цицейки

$$\Delta\psi = \exp(\psi) - \exp(-2\psi).$$

Данные классы решений представляются в виде рациональных выражений от эллиптических функций [4].

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий. Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

Список литературы

- [1] Batchelor G. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1970.
- [2] Bateman G. *MHD instability*. Cambridge, Mass., MIT Press, 1978.
- [3] Borisov A.B. and Kiseliev V.V. *Topological defects in incommensurate magnetic and crystal structures quasi-periodic solutions of elliptic Sine-Gordon equation*, Physica D. 1988. V.31, pp. 49-64.
- [4] О. В. Капцов. *Решения двумерной системы уравнений Эйлера и стационарные структуры в идеальной жидкости*, ПМТФ, 2023, т. 64, № 2, с. 64–74.

О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ПОТЕНЦИАЛ И КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО ТИПА

КАРУЛИНА Е.С.

Российский экономический университет им. Г.В.Плеханова, Россия
karulinaes@ya.ru

В данном докладе представляется обзор некоторых ранее полученных результатов об оценках первого собственного значения задачи Штурма – Лиувилля с интегральным условием на потенциал и краевыми условиями третьего типа. Начало подобных исследований было положено в [1] и продолжено в [2] – [4].

Рассматривается задача

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad (1)$$

$$\begin{cases} y'(0) - k_0^2 y(0) = 0, \\ y'(1) + k_1^2 y(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$, а q – такая функция, что $-q \in A_\gamma$, где $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и

$$A_\gamma = \{q \in L_1[0, 1] : q(x) \geq 0, \int_0^1 q^\gamma dx = 1\}.$$

Для $m_\gamma = \inf_{q \in A_\gamma} \lambda_1(-q)$ справедлива следующая

Теорема 1. Если при некоторых $\mu \geq -k_0^4$ и $\zeta \in (0, 1)$ задача

$$-y'' = \mu y, \quad x \in (0, \zeta) \cup (\zeta, 1),$$

$y'(0) - k_0^2 y(0) = 2y'(\zeta - 0) - y(\zeta) = 2y'(\zeta + 0) + y(\zeta) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0$ имеет положительное решение, определенное на $(0, 1)$, то $m_1 = \mu$ и m_1 достигается на потенциале $q^* = -\delta_\zeta$. Если ни при каких $\mu \geq -k_0^4$ и $\zeta \in (0, 1)$ такого решения не существует, то m_1 есть минимальное собственное значение задачи

$$-y'' = \lambda y,$$

$$y'(0) - (k_0^2 - 1)y(0) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0$$

и достигается на потенциале $q^* = -\delta_0$.

Для $M_\gamma = \sup_{q \in A_\gamma} \lambda_1(-q)$ справедлива следующая

Теорема 2. Если $k_0^2 + k_1^2 \leq 1$, то $M_1 = k_0^2 + k_1^2 - 1$ и достигается на потенциале

$$q^* \equiv -k_0^2 \delta_0 - k_1^2 \delta_1 - (1 - k_0^2 - k_1^2).$$

Если $k_0^2 + k_1^2 \geq 1$ и $k_1^2 - k_0^2 \leq 1$, то M_1 представляет собой первое собственное значение задачи

$$\begin{aligned} -y'' &= \lambda y, \\ 2y'(0) - (k_0^2 + k_1^2 - 1)y(0) &= 2y'(1) + (k_0^2 + k_1^2 - 1)y(1) = 0 \end{aligned}$$

и достигается на потенциале

$$q^* \equiv -(1 + k_0^2 - k_1^2)\delta_0/2 - (1 - k_0^2 + k_1^2)\delta_1/2.$$

Если $k_1^2 - k_0^2 \geq 1$, то M_1 представляет собой первое собственное значение задачи

$$\begin{aligned} -y'' &= \lambda y, \\ y'(0) - k_0^2 y(0) &= y'(1) + (k_1^2 - 1)y(1) = 0 \end{aligned}$$

и достигается на потенциале $q^* \equiv -\delta_1$.

Список литературы

- [1] Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля. Успехи математических наук, 51(3), (1996), 73–144.
- [2] Карулина Е.С. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями третьего типа. Часть 4 в сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И. В. Астаховой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, (2012), 560–607.
- [3] Karulina E., Vladimirov A. The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extrema of the first eigenvalue. Tatra Mountains Mathematical Publications, 54, (2013), 101–118.
- [4] Карулина Е.С. Экстремальные свойства первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями третьего типа. Материалы конференции "Функционально - дифференциальные уравнения: теория и приложения". (2018), 115–119.

О МЕТОДЕ ИЗУЧЕНИЯ АСИМПТОТИКИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В СЛУЧАЕ БЫСТРО РАСТУЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

КАЧКИНА А.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия
alisa-kachkina@mail.ru

Рассматривается оператор Штурма–Лиувилля $\mathbb{L}_q$ в гильбертовом пространстве $L_2[0; +\infty)$, порождаемый дифференциальным выражением $l_q(y) = -y''(x) + q(x)y(x)$, где q — некоторая непрерывная на $[0; +\infty)$ действительнoзначная функция, и следующим граничным условием в нуле: $y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$. Областью определения оператора $\mathbb{L}_q$ является множество $D(\mathbb{L}_q)$, состоящее из всех функций $y \in L_2[0; +\infty)$ таких, что y и y' абсолютно непрерывны на любом $[a; b] \subset [0; +\infty)$, $-y'' + q(x)y \in L_2[0; +\infty)$ и $y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$. Если для потенциала q выполняется $q(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$, то оператор $\mathbb{L}_q$ полуограничен снизу и имеет чисто дискретный спектр $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\lambda_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$ (Э. Ч. Титчмарш [1], А. М. Молчанов [2]). Поэтому можно говорить об асимптотике собственных значений, занумеровав их в порядке возрастания.

В данной работе исследуется метод нахождения асимптотики собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ для классов потенциалов, быстро растущих на бесконечности.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{Q}}$ класс функций $q \in C[0; +\infty) \cap C^2(0; +\infty)$, хотя бы при одном значении $1 < \gamma < 4/3$ удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} q''(x) &\geq 0, \quad q''(x) \leq (q'(x))^\gamma, \quad x \geq x_0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xq'(x)}{q(x)} &= +\infty \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначим $c_n = (\pi n)^2$, $n \in \mathbb{N}$. В работе [3] доказано, что в случае $q \in \tilde{\mathfrak{Q}}$ имеет место асимптотика $n \sim \frac{1}{\pi} \lambda_n^{1/2} p(\lambda_n)$, $n \rightarrow +\infty$, где функция p — обратная к функции потенциала q . Отсюда получаем, что $\lambda_n \sim \frac{c_n}{p^2(\lambda_n)}$, $n \rightarrow +\infty$, то есть для некоторой последовательности $\alpha_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow +\infty$ выполнено равенство: $\lambda_n = \frac{\alpha_n c_n}{p^2(\lambda_n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Положим $R_n^0 = c_n$ и индуктивно введем следующие обозначения:
 $L_n^i = \frac{\alpha_n c_n}{p^2(R_n^{i-1})}$, $R_n^i = \frac{\alpha_n c_n}{p^2(L_n^i)}$, $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Рассмотрим произвольную функцию $q \in \tilde{\mathfrak{Q}}$ и обратную к ней функцию p . Зафиксируем для q введенные выше обозначения для последовательностей. Тогда в этих обозначениях для всех номеров n , больших некоторого $N \in \mathbb{N}$, верны следующие утверждения:*

$$1) L_n^i < L_n^{i+1}, R_n^{i-1} > R_n^i; \quad 2) L_n^i < \lambda_n < R_n^i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Данная теорема доказывается, основываясь на характере роста функции p . С помощью анализа последовательностей L_n^i и R_n^i можно исследовать поведение собственных значений оператора Штурма-Лиувилля для различных классов потенциалов, удовлетворяющих условиям (1). Подобный метод с конечным числом итерационных шагов использован для нахождения асимптотики спектра оператора $\mathbb{L}_q$ в случае более узкого класса потенциалов в работе [4]. Асимптотики собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ могут использоваться при нахождении регуляризованных следов [5], при решении обратных задач и для исследования свойств собственных функций.

Список литературы

- [1] Титчмарш Э. Ч. *Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*. т.1, Москва, ИЛ, 1960.
- [2] Молчанов А. М. *Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка*. Труды Моск. матем. об-ва т.2, 1953, 169–200.
- [3] Козко А. И. *Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y'' + q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом*. Дифференц. уравнения, 41:5 (2005), 611–622; Differ. Equ., 41:5 (2005), 636–648.
- [4] Качкина А. В. *Оператор Штурма–Лиувилля с быстро растущим потенциалом и асимптотика его спектра* Чебышевский сборник, т. XXV, вып. 3 (94), 2024, с. 143–157.
- [5] Садовничий В. А., Печенцов А. С., Козко А. И. *Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов*. Доклады РАН. 2009, том 427, с. 461–465.

ЗАДАЧА О СМЕНЕ УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

КИПКАЕВА О.С.^{1,a}, ЩЕПАКИНА Е.А.^{1,b}

¹Самарский национальный исследовательский университет имени
академика С.П. Королева, Россия

^akipkaeva.os@ssau.ru, ^bshchepakina@ssau.ru

В работе рассматривается задача о потере устойчивости медленным инвариантным многообразием системы дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными. Напомним, что медленным инвариантным многообразием называется инвариантная поверхность дифференциальной системы, движение фазовой точки на которой происходит со скоростью ее медленной переменной (см., например, [1]). Медленное инвариантное многообразие является устойчивым (а, следовательно, обладает свойством притяжения траекторий дифференциальной системы, лежащих в области его влияния), если все собственные значения матрицы Якоби быстрой подсистемы лежат в левой открытой комплексной полуплоскости. Если хотя бы одно собственное значение матрицы Якоби лежит в правой открытой комплексной полуплоскости, то медленное инвариантное многообразие системы является неустойчивым (а, следовательно, обладает свойством отталкивания траекторий дифференциальной системы, лежащих в области его влияния) [1, 2].

В дополнение к рассмотренным ранее [1, 2, 3, 4], в работе рассматриваются различные сценарии, при которых одно или пара собственных значений матрицы Якоби быстрой подсистемы переходит из левой открытой комплексной полуплоскости в правую, что сопровождается потерей устойчивости медленным инвариантным многообразием системы.

Список литературы

- [1] Щепакина Е.А. *Два вида смены устойчивости интегральных многообразий*. Дифференциальные уравнения, 40(5) (2004), 713-716.

- [2] Кипкаева О.С., Щепаккина Е.А. *Смена устойчивости инвариантных многообразий дифференциальных систем с разномасштабными переменными*. Дифференциальные уравнения, 60(9) (2024), 1155-1166.
- [3] Шишкова М.А. *Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных*. Доклады Академии наук СССР, 209(3) (1973), 576-579.
- [4] Нейштадт А.И. *Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось*. Успехи математических наук, 40(5) (1985), 300-301.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ТРАЕКТОРИЙ-УТОК

КИРСАНОВА А.С.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика
С.П. Королева, Россия
askirsanova99@gmail.com

В данной работе проводится сравнительный анализ аппроксимации Маклорена и аппроксимации Паде, при построении асимптотических приближений уточных значений управляющего параметра [1, 2, 3]. Анализ проводится для системы Ван дер Поля следующего вида [4]:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x, \\ \dot{y} &= \alpha - x.\end{aligned}$$

и математической модели ветроэнергетической установки, которая представляет собой дифференциальную систему вида [5, 6, 7, 8]:

$$\begin{aligned}J\dot{\Omega} &= -kI + M(\Omega), \\ L\dot{I} &= k\Omega - (R + r)I, \\ \dot{R} &= \varepsilon F(\Omega, I, R),\end{aligned}$$

где I — сила тока в обмотке якоря, Ω — коэффициент быстроходности, R — внешнее сопротивление, точка означает производную по времени t . Параметр k — коэффициент электромеханического взаимодействия, r — малое внутреннее сопротивление якоря, J — момент

инерции турбины, L — индуктивность якоря, α — управляющий параметр. Функция $M(\Omega)$ задается аналитически на основе экспериментальных данных.

Результаты численных экспериментов демонстрируют хорошее согласование данных численного и асимптотического анализа, и демонстрируют заметное преимущество дробно-рациональных приближений Паде над обычно используемыми приближениями на основе рядов Маклорена с разложениями по степеням малого параметра.

Список литературы

- [1] Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*. Наука, М: 1975.
- [2] Baker G.A., Graves-Morris P. *Padé Approximants*. Cambridge Univ. Press, Cambridge: 1996.
- [3] Соболев В.А., Щепаккина Е.А. *Редукция моделей и критические явления в макрокинетике*. ФИЗМАЛИТ, М.: 2010.
- [4] Звонкин А.Л., Шубин М.А. *Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений*. Успехи математических наук, 2 (1984), 77-127.
- [5] Досаев М.З., Линь Ч.Х., Лю В.Л., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. *Качественные анализ стационарных режимах малых ветровых электростанций*. Прикладная математика и механика, 3 (2009), 368-374.
- [6] Dosaev M.Z., Samsonov V.A., Selyutskii Y.D., Lu W.-L., Lin C.-H. *Bifurcation of operation modes of small wind power stations and optimization of their characteristics*. Mechanics of Solids, 44 (2009), 214-221.
- [7] Kirsanova A. *Critical Phenomena in the Darrieus Wind Turbine Mode*. 16th International Conference Management of large-scale system development IEEE, (2023), 1-4.
- [8] Кирсанова А.С. *Релаксационные колебания в модели ветроэнергетической установки Дарье*. Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 1 (2024), 31-39.

ПРОСТРАНСТВЕННО–НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ САМАРСКОГО–ИОНКИНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

КОЖАНОВ А.И.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
kozhanov@math.nsc.ru

Нелокальные задачи с условиями Самарского–Ионкина занимают особое место среди всех нелокальных задач для дифференциальных уравнений. Активное исследование их началось с работы Н.И. Ионкина [1], и в этой работе был предложен оригинальный метод построения решения в виде функционального ряда по специальной биортонгальной системе. Этот метод в дальнейшем неоднократно (вплоть до последних дней) применялся в исследованиях разрешимости задач с нелокальными условиями [1] для гиперболических уравнений, параболических уравнений второго и четвертого порядков, вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа. Но в более позднее время — именно в начале XXI века — были предложены методы исследования разрешимости задач с нелокальными условиями [1] и с более общими условиями, называемыми в литературе "условиями Самарского–Ионкина" (см. [2]), не использующие представление решения в виде специального ряда. Эти методы позволили существенно расширить класс уравнений, для которых нелокальные задачи с условиями Самарского–Ионкина разрешимы; условно эти методы можно разделить на две группы — на *метод расщепления* и *метод априорных оценок*.

В настоящем докладе представлены последние результаты, полученные как с помощью метода расщепления, так и с помощью метода, основанного на априорных оценках.

Основные идеи методов, о которых говорится выше, представлены в работе [3].

Доклад подготовлен в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF–2022–0008.

Список литературы

- [1] Ионкин Н.И. *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием*. Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
- [2] Самарский А.А. *О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений*. Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1221–1228.
- [3] Кожанов А.И. *Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных: сводка результатов, нерешенные задачи*. Новосибирск: Наука, 2024.

О КОРРЕКТНОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

КОЖАНОВ А.И.^{1,a}, ШАДРИНА Н. Н.^{2,b}

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

²РТУ МИРЭА, Москва

^akozhanov@math.nsc.ru, ^bshadrinann8@yandex.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с разрывным коэффициентом в старшей части.

Пусть Ω есть интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q , Q_1 , Q_2 есть прямоугольники $\Omega \times (-a, a)$, $\Omega \times (-a, 0)$, $\Omega \times (0, a)$ соответственно ($a > 0$ - заданное число), $c(x, y)$, $f(x, y)$, $h(y)$ и $\gamma(y)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $y \in [-a, a]$, α , β , α_i , $\beta_i, i = 1, 2$, есть заданные действительные числа. Считаем, что функция $h(y)$ непрерывна на промежутках $[-a, 0)$ и $(0, a]$, и имеет конечное значение $h(-0)$ и $h(+0)$. Рассмотрим дифференциальный оператор L , действие которого на заданной функции $v(x, y)$ определяется равенством

$$Lv = v_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}(h(y)v_y) + c(x, y)v.$$

Нелокальная задача I: найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения

$$Lu = f(x, y) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, a) = u(x, -a) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, y) = \gamma(y)u(1, y), \quad y \in (-a, 0) \cup (0, a), \quad (3)$$

$$u_x(1, y) = 0, \quad y \in (-a, 0) \cup (0, a), \quad (4)$$

$$u(x, -0) = \alpha u(x, +0), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$u_y(x, +0) = \beta u_y(x, -0), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Нелокальная задача II: найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия сопряжения (5) и (6), а также краевое условие (2) и краевые условия

$$u_x(0, y) = \gamma(y)u_x(1, y), \quad y \in (-a, 0) \cup (0, a), \quad (7)$$

$$u(1, y) = 0, \quad y \in (-a, 0) \cup (0, a). \quad (8)$$

Нелокальная задача III: найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2), (7) и (8), а также условия сопряжения

$$u_y(x, -0) = \alpha_1 u(x, -0) + \alpha_2 u(x, +0), \quad (9)$$

$$u_y(x, +0) = \beta_1 u(x, -0) + \beta_2 u(x, +0). \quad (10)$$

Нелокальная задача IV: найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2), (7) и (8), а также условия сопряжения (9) и (10)

В работе сформулированы теоремы, содержащие условия, выполнение которых гарантирует существование и единственность регулярных решений данных задач.

Данная работа является продолжением исследования, начатого авторами в том числе в статьях [1] – [3] .

Список литературы

- [1] Кожанов А. И., Шадрина Н. Н. Исследование влияния параметров на корректность задачи сопряжения дифференциального уравнения Буссинеска-Лява // Челябинский физико-математический журнал. — Челябинск. — 2022. — Т. 7. №1 — С. 30 - 43.
- [2] Кожанов А. И., Шадрина Н. Н. Краевые задачи с условиями сопряжения для квазипараболических уравнений третьего порядка с разрывным знакопеременным коэффициентом // Сибирские электронные математические известия. — Новосибирск. — 2021. — Т. 18. №1 — С. 599 - 616.
- [3] Шадрина, Н.Н. О влиянии параметров на разрешимость некоторых задач сопряжения для эллиптических уравнений // Сибирские электронные математические известия. — Новосибирск. — 2016. — Т. 13. — С. 411 - 425.

ЛОКАЛЬНЫЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

КОЖЕВНИКОВА Л.М.

Уфимский университет науки и технологий, Россия
kosul@mal.ru

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для анизотропного квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка с переменным ростом и локально суммируемой функцией f рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + b(x, u, \nabla u) = f, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

М.Ф. Бидо-Верон [1] ввела понятие локального ренормализованного решения для уравнения с p -лапласианом, поглощением и мерой Радона μ :

$$-\Delta_p u + |u|^{p_0-2} u = \mu, \quad p \in (1, n), \quad 0 < p - 1 < p_0.$$

В настоящей работе это понятие адаптируется на анизотропное уравнение (1) с переменными показателями роста. Автором доказаны существование и регулярность локального ренормализованного решения задачи (1), (2), установлена его знакоопределенность.

Обозначим $C^+(\bar{\Omega}) = \{p \in C(\bar{\Omega}) \mid 1 < \bar{p} \leq \hat{p} < +\infty\}$, $\bar{p} = \inf_{x \in \bar{\Omega}} p(x)$, $\hat{p} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} p(x)$, $p_+(x) = \max_{i=1, n} p_i(x)$, $p_-(x) = \min_{i=1, n} p_i(x)$.

Условие P. Предполагаем, что функции

$$a(x, s) = (a_1(x, s), \dots, a_n(x, s)) : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad b(x, s_0, s) : \Omega \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

каратеодориевы. Пусть существуют неотрицательные функции $\Phi_i \in L_{p'_i(\cdot), \text{loc}}(\bar{\Omega})$, $i = 1, \dots, n$, $\Phi_0 \in L_{1, \text{loc}}(\bar{\Omega})$, непрерывная неубывающая функция $\hat{b} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, положительные числа $\hat{a}, \bar{a}, \bar{b}$ такие, что при п.в. $x \in \Omega$, для всех $s, t \in \mathbb{R}^n$, $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства:

$$|a_i(x, s)| \leq \hat{a} \left(P(x, s)^{1/p'_i(x)} + \Phi_i(x) \right), \quad i = 1, \dots, n;$$

$$(a(x, s) - a(x, t)) \cdot (s - t) > 0, \quad s \neq t;$$

$$a(x, s) \cdot s \geq \bar{a}P(x, s),$$

$$|b(x, s_0, s)| \leq \hat{b}(|s_0|) (\Phi_0(x) + P(x, s));$$

$$b(x, s_0, s)s_0 \geq \bar{b}|s_0|^{p_0(x)+1}, \quad p_+(\cdot) - 1 < p_0(\cdot).$$

Здесь $P(x, s) = \sum_{i=1}^n |s_i|^{p_i(x)}$, $s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$.

При этом предполагаем, что функции $p_i \in C^+(\bar{\Omega})$, $i = 0, \dots, n$, и

$$\underline{p}(x) = n \left(\sum_{i=1}^n 1/p_i(x) \right)^{-1} < n, \quad \underline{p}^*(x) = \frac{n\underline{p}(x)}{n - \underline{p}(x)}.$$

Обозначим $q_0(\cdot) = \underline{p}^*(\cdot)/\bar{p}'_-$, $\bar{p}'_- = \bar{p}_-/(\bar{p}_- - 1)$. Пусть выполнено дополнительное предположение: $p_+(\cdot) - 1 < q_0(\cdot)$, которое возможно при условии, что $p_+(\cdot) < \underline{p}^*(\cdot)$.

Теорема 1. Пусть $f \in L_{1, \text{loc}}(\bar{\Omega})$, выполнено условие P, тогда существует локальное ренормализованное решение и задачи (1), (2). Если $f \geq 0$, то $u \geq 0$ для п.в. $x \in \Omega$.

Следует отметить, что в работах [2], [3] найдены условия на показатели $p_i(\cdot)$, $i = 0, \dots, n$, достаточные для существования (см. [2]) и единственности (см. [3]) локального слабого решения анизотропного эллиптического уравнения с переменными показателями нелинейностей вида (1) ($b(x, s_0, s) \equiv b(x, s_0)$).

Список литературы

- [1] Bidaut-Véron M. F. *Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data*. Adv. Nonlinear Stud., 3:1 (2003), 25-63.
- [2] Mokhtari F. *Nonlinear anisotropic elliptic equations in R^N with variable exponents and locally integrable data* Math. Meth. Appl. Sci. 40 (2017), 2265-2276.
- [3] Bokalo M., Domanska O. *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces*. Matemat. Studii. 40:1 (2007), 77-91.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

КОНЕНКОВ А.Н.

Рязань, Россия

Рязанский государственный университет
an.konenkov@gmail.com

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, ее граница $\partial\Omega \in C^\infty$, а S — область в $\mathbb{R}^k$ с достаточно регулярной границей ∂S . Предполагается, что в цилиндре $H = S \times (0, T)$ существует функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, удовлетворяющая оценкам

$$0 \leq G_H(y, \xi, y - \tau) \leq Z(x - \xi, t - \tau), \quad (y, t), (\xi, \tau) \in \bar{H}, \quad 0 < \tau < t \leq T.$$

Для этого достаточно, например, чтобы $\partial S \in C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Обозначим через

$$K = \{(tx, t) \mid x \in \Omega, \quad 0 < t < T\}, \quad 0 < T < \infty,$$

конус в $\mathbb{R}^{n+1}$ с боковой границей $\Sigma_K = \{(tx, t) \mid x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T\}$.

Обозначим через $\Pi = S \times K$ область в $\mathbb{R}^{n+k+1}$, с боковой границей $\Sigma_\Pi = \overline{S \times \Sigma_K} \cup \partial S \times \overline{K} \setminus \{0\}$. Сечение области Π плоскостью $t = \text{const}$ является $(n+k)$ -мерной областью, которая при $t = 0$ вырождается в k -мерную область S .

Рассматривается первая краевая задача с нулевой граничной функцией

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= f \text{ в } \Pi, \\ u|_{\Sigma_\Pi} &= 0. \end{cases} \quad (1)$$

Относительно правой части f предполагается, что она принадлежит классу $L_{\infty, \text{loc}}(\Pi)$ и может расти определенным образом при $t \rightarrow 0+$. Установлено существование и единственность решения задачи (1) в некотором классе функций, также допускающем рост при $t \rightarrow 0+$. В случае ограниченной области S найдены собственные функции задачи (1). Получено представление функции Грина в виде ряда и установлены ее оценки с константами, не зависящими от области S .

Также рассматривается первая краевая задача в областях, вырождающихся по части переменных в финальный момент времени.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

КОННОВА К.А.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика
С.П. Королева, Россия
k.a.konnova@mail.ru

Рассматривается линейная автономная гироскопическая система [1]

$$J\ddot{x} + (HG + D)\dot{x} + Cx = 0, \quad (1)$$

где x - вектор обобщенных координат, J и D - симметрические положительно определенные матрицы, G - кососимметрическая невырожденная матрица, H - большой параметр.

Вводится обозначение $\dot{x} = y$ и система (1) переписывается в виде двух векторных уравнений с малым параметром $\varepsilon = 1/H$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \varepsilon J\dot{y} = -(G + \varepsilon D)y - \varepsilon Cx. \end{cases} \quad (2)$$

Для системы (2) строится расщепляющее преобразование [2]

$$\begin{cases} x = u + \varepsilon Pz, \\ y = z + Lx, \end{cases}$$

приводящее ее к виду

$$\begin{cases} \dot{u} = A_1(\varepsilon)u, \\ \varepsilon \dot{z} = A_2(\varepsilon)z. \end{cases}$$

Для построения матриц L и P используются асимптотические разложения по степеням малого параметра

$$\begin{aligned} L &= L(\varepsilon) = L^{(0)} + \varepsilon L^{(1)} + \varepsilon^2 L^{(2)} + \varepsilon^3 L^{(3)} + \dots, \\ P &= P(\varepsilon) = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \varepsilon^3 P^{(3)} + \dots, \end{aligned}$$

и матричные аппроксимации Паде [3].

На примере уравнений гироскопической вертикали с радиальной коррекцией [1, 2]

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} - k\beta = 0, \\ A\ddot{\beta} + H\dot{\alpha} + k\alpha = 0, \end{cases} \quad (3)$$

показано, что аппроксимации Паде демонстрируют меньшую погрешность, чем стандартное разложение в ряд Маклорена.

Список литературы

- [1] Меркин Д.Р. *Гироскопические системы*. Наука, М.: 1974
- [2] Воропаева Н.В., Соболев В.А. *Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем*. ФИЗМАТЛИТ, М: 2009.
- [3] Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимация Паде*. Мир, М.:1986.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЛАКУНАХ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

КОРДЮКОВ Ю.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия
yurikor@matem.anrb.ru

Рассмотрим квазиклассический магнитный оператор Шредингера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ вида

$$H_{\hbar} = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j(x) \right)^2 + \hbar V(x), \quad \hbar > 0,$$

где $A_j, j = 1, \dots, 2n$, и V — гладкие вещественнозначные функции. Предполагается, что функции

$$B_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}, \quad j, k = 1, \dots, 2n.$$

и V ограничены в $\mathbb{R}^{2n}$ вместе с производными произвольного порядка. Предполагается также, что ранг матрицы $B(x) = (B_{jk}(x))$ для любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$ равен $2n$, причем существует такая постоянная $c_0 > 0$, что $|B(x)| \geq c_0$ для любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$.

Обозначим через $\pm ia_j(x), j = 1, \dots, n$, с $a_j(x) > 0$ собственные значения кососимметрической матрицы $B(x), x \in \mathbb{R}^{2n}$. Положим

$$\Lambda_{\mathbf{k}}(x) = \sum_{j=1}^n (2k_j + 1) a_j(x) + V(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Предположим, что для некоторого отрезка $[a, b]$ замкнутое подмножество $\mathcal{K}_{[a,b]}$ в $\mathbb{R}^{2n}$, состоящее из всех точек $x \in \mathbb{R}^{2n}$, для которых $\Lambda_{\mathbf{k}}(x) \in [a, b]$ при некотором $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n$, компактно.

Теорема 1 ([1]). *Существуют такие $\epsilon > 0$ и $\hbar_0 > 0$, что для любого $\hbar \in (0, \hbar_0]$ спектр оператора $H_{\hbar}$ на интервале $[\hbar a + \epsilon \hbar^{5/4}, \hbar b - \epsilon \hbar^{5/4}]$ дискретен.*

Следующие теоремы описывают асимптотическое распределение собственных значений на интервале (a, b) .

Теорема 2 ([2]). *Существуют обобщенные функции $f_r \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $r = 0, 1, \dots$, такие, что для любой функции $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ с носителем в (a, b) справедливо асимптотическое разложение*

$$\mathrm{tr} \varphi(H_h/\hbar) \sim \hbar^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \langle f_r, \varphi \rangle \hbar^{\frac{r}{2}}, \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (1)$$

Старший коэффициент в разложении (1) задается формулой

$$\langle f_0, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(\Lambda_{\mathbf{k}}(x)) \prod_{j=1}^n a_j(x) dx.$$

Следующие коэффициенты имеют вид

$$\langle f_r, \varphi \rangle = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n} \sum_{\ell=0}^m \int_{\mathbb{R}^{2n}} P_{\mathbf{k}, \ell, r}(x) \varphi^{(\ell)}(\Lambda_{\mathbf{k}}(x)) dx, \quad r \geq 1,$$

где $P_{\mathbf{k}, \ell, r}(x)$ полиномиально ограничены по $\mathbf{k}$.

Для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ обозначим через $N([\hbar\alpha, \hbar\beta]; H_h)$ число собственных значений оператора H_h на интервале $[\hbar\alpha, \hbar\beta]$, взятых с учетом кратностей.

Теорема 3 ([2]). *Для любого $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ справедлива формула*

$$N([\hbar\alpha, \hbar\beta]; H_h) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n} \int_{\{x \in \mathbb{R}^{2n} : \Lambda_{\mathbf{k}}(x) \in [\alpha, \beta]\}} \prod_{j=1}^n a_j(x) dx, \quad \hbar \rightarrow 0.$$

Список литературы

- [1] Kordyukov, Yu. A. *Exponential localization for eigensections of the Bochner-Schrödinger operator*. Russ. J. Math. Phys., 31 (2024), 461–476.
- [2] Kordyukov, Yu. A. *Eigenvalue distribution in gaps of the essential spectrum of the Bochner-Schrödinger operator*, preprint arXiv:2504.12928 [math.SP].

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕРОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

КОРОВИНА М.В.

МГУ им. Ломоносова, Россия
betelgeuser@yandex.ru

Одной из фундаментальных задач аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами является задача построения асимптотик их решений в окрестности иррегулярных особых точек. Эта задача была сформулирована Пуанкаре в работах [1], [2].

В работах Пуанкаре было доказано, что полученные расходящиеся ряды являются асимптотическими рядами решений дифференциальных уравнений с голоморфными (мероморфными) коэффициентами в окрестности иррегулярных особенностей. Задача о построении асимптотик решений для дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности, которая была сформулирована Пуанкаре и которая является частным случаем общей проблемы Пуанкаре, была решена в работах [3], [4]. Однако общая проблема, которая заключается в построении асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестности произвольной иррегулярной особой точки до сих пор в общем случае не решена. Именно решению этой задачи и посвящена данная работа. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} a_n(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^n u(x) + a_{n-1}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} u(x) + \dots \\ + a_i(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^i u(x) + \dots + a_0(x) u(x) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $a_i(x), i = 0, \dots, n$ — мероморфные функции. Задача заключается в построении асимптотик решений уравнения (1) в окрестности особых точек (как регулярных, так и иррегулярных).

Без ограничения общности будем считать, что особой точкой уравнения (1) является $r = 0$. В работе [5] показано, что уравнение (1)

может быть приведено к виду

$$H \left(r, -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right) u = 0, \quad (2)$$

где

$$H \left(r, -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right) = \left(-r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(r) \left(-r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^i.$$

Здесь $k = -1, 0, 1, 2, \dots$, а через $\tilde{a}_i(r)$ обозначены соответствующие голоморфные функции. В работе [5] найдено минимальное целое неотрицательное значение k , то есть минимальный порядок вырождения, и коэффициенты этого уравнения. Если $k \in N$, то особая точка является иррегулярной, в этом случае запишем оператор (2) в виде

$$H \left(r, -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right) = k^n \left(\left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(r) \frac{1}{k^{n-i}} \left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^i \right).$$

Основным символом дифференциального оператора

$H \left(r, -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)$ называется функция $H_0(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tilde{a}_i(0)}{k^{n-i}} p^i$.

Для построения асимптотик решений дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами в окрестности их иррегулярных особых точек применяются методы ресургентного анализа, основой которых является преобразование Лапласа—Бореля. В том числе метод повтрного квантования.

Возникает вопрос о том какой вид имеет асимптотический член соответствующий кратному корню. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 1. *Любая асимптотика решений уравнения (1) со степенью вырождения $k+1$ в пространстве функций k -экспоненциального роста представима в виде суммы линейных комбинаций асимптотических членов вида*

$$u_i(r) = \exp \left(P_i \left(r^{-\frac{1}{l_i}} \right) \right) r^{\sigma_i} \sum_{j=0}^{\infty} a_j^i r^j,$$

где l_i, σ_i — некоторые комплексные числа $P_i(x)$ — полином, степень которого не превышает kl_i , $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^i x^j$ — асимптотический ряд, и членов соответствующих конормальным асимптотикам.

Список литературы

- [1] Poincaré H. *Sur les integrales irregulieres des equations lineaires*. Acta Math. 8 (1886), 295–344.
- [2] Poincaré H. *Analysis of the mathematical and natural works of Henri Poincare. In Selected Works in Three Volumes. Volume 3. Mathematics. Theoretical Physics*; Nauka Publishing House: Moscow, Russia, 1974.
- [3] Maria Korovina, *Asymptotics of Solutions of Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients in the Neighborhood of an Infinitely Distant Point*. MDPI Mathematics, 8:12 (2020), 2249, 15 pp.
- [4] Korovina M. V. *Uniform Asymptotics of Solutions to Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients in the Neighborhood of an Infinitely*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 44:7 (2023), 2765–2780.
- [5] Кац Д. С. *Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов*. Дифференциальные уравнения. Т. 51, № 12 (2015), С. 1612–1617.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

КОСТИН А.Б.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия
abkostin@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ рассматривается модельная обратная задача нахождения пары функций $\{u(x, t); f(x)\}$ из условий:

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = h(x, t)f(x) \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T], \quad (2)$$

$$\ell(u) \equiv \int_0^T u(x, t) d\mu(t) = \chi(x) \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Здесь функции h, μ, χ заданы, Δ — оператор Лапласа, $n = n_x$ — внешняя нормаль к границе в точке $x \in \Gamma$. Скалярная функция $\mu(t)$

в условии нелокального наблюдения (3) имеет ограниченную вариацию и непрерывна на $[0, T]$ справа; для $t \geq T$ положим $\mu(t) = \mu(T)$. Пусть также выполняются следующие условия:

$$h, h_t \in L_{\infty,2}(Q), \quad |\ell(h)(x)| \geq \delta > 0 \quad \text{для п.в. } x \in \Omega; \quad (4)$$

$$\mu(t) \text{ является неубывающей на } [0, T], \quad \bigvee_0^T(\mu) > 0; \quad (5)$$

$$\chi(x) \in W_2^2(\Omega), \quad \frac{\partial \chi}{\partial n}(x) = 0 \quad x \in \Gamma. \quad (6)$$

Определение 1. Обобщенным решением обратной задачи называется пара функций $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $f \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющая условиям (1)–(3).

Для произвольного $f \in L_2(\Omega)$ обозначим через $u = u(x, t; f)$ решение прямой задачи (1), (2). Как хорошо известно, оно существует, единственно и принадлежит $W_2^{2,1}(Q)$. В силу условий (4) это решение обладает дополнительной гладкостью, а именно

$$u \in C([0, T]; W_2^2(\Omega)), \quad u_t \in C([0, T]; L_2(\Omega)).$$

При этом (1) будет выполняться для каждого $t \in [0, T]$ как равенство в $L_2(\Omega)$. Это показывает, что при наложенных требованиях на функцию h условия гладкости и согласования (6) на функцию χ необходимы для разрешимости обратной задачи.

Теорема 1. Задача (1)–(3) эквивалентна линейному операторному уравнению 2-ого рода с вполне непрерывным в $L_2(\Omega)$ оператором.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (4), (5), и почти всюду в Q справедливы неравенства

$$\frac{h(x, t)}{\ell(h)(x)} \geq 0, \quad \frac{h_t(x, t)}{\ell(h)(x)} \geq 0.$$

Тогда для каждой функции χ , удовлетворяющей условиям (6), существует и притом единственная пара функций $\{u(x, t); f(x)\}$ — решение обратной задачи (1)–(3). Функция $u(x, t)$ обладает при этом дополнительной гладкостью

$$u \in C^1([0, T]; L_2(\Omega)) \cap C([0, T]; W_2^2(\Omega)),$$

и справедлива оценка устойчивости

$$\max_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{2, \Omega}^{(2)} + \|f\|_{2, \Omega} \leq C \|\chi\|_{2, \Omega}^{(2)}.$$

Линейная задача в $L_2(\Omega)$ с финальным и интегральным наблюдением исследовалась в [1]. Нелокальное условие наблюдения вида (3) впервые в обратных задачах для абстрактных уравнений появилось в [2]. Систематическое исследование линейной обратной задачи с условием (3) для параболических уравнений проведено в [3].

Список литературы

- [1] Прилепко А. И., Костин А.Б. *О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением* // Матем. сборник. 1992. Т. 183. № 4. С. 49–68.
- [2] Прилепко А. И., Тихонов И.В. *Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении* // Известия РАН. Сер. математическая. 1994. Т. 58. № 2. С. 167–188.
- [3] Костин А.Б. *Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении с нелокальным условием наблюдения* // Матем. сборник. 2013. Т. 204. № 10. С. 3–46.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ УПРУГОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ В СЕЧЕНИИ

КОСТИН Г.В.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия
kostin@ipmnet.ru

Исследуется управляемость системы, моделирующей продольные колебания консольно закрепленного однородного упругого стержня с пьезоэлектрическим актюатором [1, 2]. В безразмерном виде ставится задача о переводе стержня с помощью силы в поперечном сечении из начального состояния в нулевое за время T : для распределений $r_0, w_0 \in H^1(\mathcal{X})$, $\mathcal{X} = (0, 1)$, найти управление $u \in H^1(\mathcal{T})$, $\mathcal{T} = (0, T)$, при котором движение $r^*, w^* \in H^1(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$, удовлетворяет терминальное условие $r^*|_{t=T} = w^*|_{t=T} = 0$. Под движением понимается пара функций r^*, w^* , минимизирующая функционал состояния

Φ при выполнении начальных и краевых условий:

$$\begin{aligned}\Phi[r^*, w^*, u] &= \min_{r, w \in H^1(\mathcal{D})} \Phi[r, w, u] = 0, \quad \Phi = \int_{\mathcal{D}} \varphi dt dx \geq 0, \\ \varphi &= g^2 + h^2, \quad g = \partial_x r - \partial_t w, \quad h = \partial_t r - \partial_x w - f; \\ f(t, x) &= \begin{cases} \dot{u}(t), & x \in \mathcal{U}, \\ 0, & x \notin \mathcal{U}, \end{cases} \quad t \in \mathcal{T}, \quad u(0) = 0; \\ r(0, x) &= r_0(x), \quad w(0, x) = w_0(x); \quad r(t, 1) = w(t, 0) = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $r(t, x)$ — динамический потенциал, $w(t, x)$ — перемещения точек стержня, $f(t, x)$ — сила в сечении, $\mathcal{U} = (x^-, x^+) \subset \mathcal{X}$ — интервал, на котором действует сила, T — время управления. Частные производные r представляют собой полную нормальную силу в поперечном сечении ($\partial_t r$) и линейную плотность импульса ($\partial_x r$). Решение задачи (1) при заданном $u(t)$ ищется в виде ряда:

$$r(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} R_m(x) r_m(t), \quad w(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} W_m(x) w_m(t),\tag{2}$$

$$\begin{aligned}R_n &= -2\omega_n^{-1} \cos \omega_n x, \quad W_n = 2\omega_n^{-1} \sin \omega_n x, \quad \omega_n = n\pi - \pi/2, \\ \dot{r}_n(t) &= -\omega_n w_n(t) + \omega_n^{-1} c_n \dot{u}(t), \quad \dot{w}_n(t) = \omega_n r_n(t), \\ r_n(0) &= r_n^0, \quad w_n(0) = w_n^0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_n = W_n(x^-) - W_n(x^+).\end{aligned}\tag{3}$$

В (2) R_n, W_n — собственные функции колебаний стержня, соответствующие собственной частоте ω_n ; r_n^0, w_n^0 — проекции распределений r_0, w_0 на R_n, W_n ; r_n, w_n — амплитуды потенциала и перемещений для n -й моды; c_n — коэффициент усиления при управлении этой модой.

Для $x^\pm$ существуют условия, при которых n -я мода неуправляема:

$$\frac{x^+ + x^-}{2} = \frac{2m - 1}{2n - 1} < 1 \quad \vee \quad x^+ - x^- = \frac{2m}{2n - 1} \leq 1, \quad m, n \in \mathbb{N}.\tag{4}$$

В случае, когда условие (4) не выполнено ни для каких $m, n \in \mathbb{N}$ управление, приводящее за время $T \geq T^* = 2$ систему (3) из начального в нулевое состояние, записывается в виде

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, \tau), \\ u^*(t - \tau), & t \in (\tau, T), \end{cases} \quad (5)$$

$$u^*(t) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^{-1} (r_n^\tau \sin \omega_n t + w_n^\tau (\cos \omega_n t - 1)), \quad t \in \mathcal{T}^*.$$

Здесь $\mathcal{T}^* = (0, T^*)$, а r_n^τ, w_n^τ — проекции функций состояния $r^*(\tau, \cdot)$, $w^*(\tau, \cdot)$ на собственные функции R_n, W_n .

Можно показать, что, коэффициенты c_n , введенные в (2), пробегают конечное число значений, когда $x^+, x^- \in \mathbb{Q}$. Более того, если $c_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, управление u^* из (5) принадлежит тому же классу, что и r_0, w_0 . Иными словами, $u^* \in H^1(\mathcal{T}^*) \Rightarrow u \in H^1(\mathcal{T})$.

Работа выполнена по теме гос. задания №124012500443-0.

Список литературы

- [1] Костин Г.В. *Оптимальные движения упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическим актюатором* Известия РАН. Теория и системы управления, 3 (2024), 104–116.
- [2] Костин Г.В. *Гашение продольных колебаний упругого стержня с помощью пьезоэлектрического элемента* Прикладная математика и механика, 88 (2024), 525–539.

МАТРИЦА ВАНДЕРМОНДА, ТЕОРЕМЫ ЭРМИТА И ДАНФОРДА

КОСТРУБ И.Д.^{1,a}, ПЕРОВ А.И.^{1,b}

¹Воронежский государственный университет, Россия

^aikostrub@yandex.ru, ^banperov@mail.ru

Основные понятия. $\mathbf{B}$ — комплексная банахова алгебра, n произвольное фиксированное натуральное число; $\mathbf{B}^n$ — комплексное банахово пространство столбцов $\mathbf{X}$ с компонентами $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ из $\mathbf{B}$ ($\|\mathbf{X}\| = \max\{\|\mathbf{X}_j\|, j = 1, \dots, n\}$); $\mathbf{B}^{n \times n}$ — комплексная банахова алгебра $n \times n$ -матриц $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{jk})$, где $\mathbf{A}_{jk}$ из $\mathbf{B}$ ($j, k = 1, \dots, n$). Она изометрически изоморфна комплексной банаховой алгебре линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathbf{B}^n$, ($\|\mathbf{A}\| = \sup\{\|\mathbf{A}\mathbf{X}\|, \mathbf{X} \in \mathbf{B}^n, \|\mathbf{X}\| = 1\}$).

$\in \mathbf{B}^n, \|\mathbf{X}\| \leq 1\}$; $S(\mathbf{X})$ – спектр оператора $\mathbf{X}$ (непустое ограниченное замкнутое множество), $\mathbf{E}$ – единичный оператор.

Матрица Вандермонда. Поставим $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ из $\mathbf{B}$ в соответствие матрицу из $\mathbf{B}^{n \times n}$ – *матрицу Вандермонда* порядка n

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} & \dots & \mathbf{E} \\ \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{X}_1^{n-1} & \mathbf{X}_2^{n-1} & \dots & \mathbf{X}_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Нас интересует, когда существует обратная матрица Вандермонда $\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) \equiv \mathbf{W}$. Далее считаем, что $\mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) = \mathbf{W}_{jn}$ обратимы $j = 1, \dots, n$.

Система $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ *лежит в общем положении*, если построенная по ней матрица Вандермонда является обратимой. Необходимое условие обратимости $(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_k)^{-1}$ при $j \neq k$ – выполнение *условия разделенности*. Оно выполнено, если выполнено *условие спектральной разделенности* $S(\mathbf{X}_j) \cap S(\mathbf{X}_k) = \emptyset$ при $j \neq k, j = 1, \dots, n$.

Теорема Эрмита. Пусть $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ корни алгебраического уравнения порядка $n : \mathbf{X}^n + \mathbf{P}_1 \mathbf{X}^{n-1} + \dots + \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{X} + \mathbf{P}_n = 0$. Предполагается, что $S(\mathbf{X}_j) \subset G, j = 1, \dots, n$, (G открытое множество комплексной плоскости $\mathbb{C}$). Считаем, что система корней $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ лежит в общем положении.

Рассмотрим формулу, где $f(\lambda)$ – аналитическая функция, заданная на G ; $\mathbf{W}_j, j = 1, \dots, n$ элементы последнего столбца матрицы $\mathbf{W}$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(\lambda) (\lambda^n + \mathbf{P}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{P}_{n-1} \lambda + \mathbf{P}_n)^{-1} d\lambda = \sum_{j=1}^n f(\mathbf{X}_j) \mathbf{W}_j.$$

Функция $f(\mathbf{X})$ определяется с помощью интеграла

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(\lambda) (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{X})^{-1} d\lambda \quad (S(\mathbf{X}) \subset G).$$

Разделенной разностью порядка $n - 1$ для функции $f(\mathbf{X})$, отвечающей системе узлов $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$, лежащей в общем положении считаем $\Delta^{n-1}f(\mathbf{X})(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) = \sum_{j=1}^n f(\mathbf{X}_j)\mathbf{W}_j$. С учетом этого

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} f(\lambda)(\mathbf{E}\lambda^n + \mathbf{P}_1\lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{P}_n)^{-1} d\lambda = \Delta^{n-1}f(\mathbf{X})(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n).$$

Эта формула вполне соответствует формуле Эрмита. Ее можно трактовать как интегральное представление разделенной разности.

Теорема Данфорда. *Справедливо включение*

$$S(\Delta^{n-1}f(\mathbf{X})(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)) \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{f(\lambda_j)}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)} : \lambda_j \in S(\mathbf{X}_j), j = 1..n \right\},$$

$$\text{или } S(\Delta^{n-1}f(\mathbf{X})(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)) \subseteq \Delta^{n-1}f(\lambda)(S(\mathbf{X}_1), \dots, S(\mathbf{X}_n)).$$

При этом предполагается, что $S(\mathbf{X}_j) \cap S(\mathbf{X}_k) = \emptyset$ при $j \neq k$.

Список литературы

- [1] Перов А.И., Коструб И.Д. Матрица Вандермонда в коммутативном случае. Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр, 2024, Т. 157, № 3, 33-37.
- [2] Перов А.И., Коструб И.Д. Матрица Вандермонда в общем случае. Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр, 2025, Т. 521, № 1, 81-87.

МОДЕЛИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ - УПРАВЛЕНИЕ ЭПИДЕМИЯМИ С УЧЕТОМ РЕАКЦИИ НАСЕЛЕНИЯ

КРИВОРОТЬКО О.И.^{1,a}, КАБАНИХИН С.И.^{1,b}

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

^ao.i.krivorotko@math.nsc.ru, ^bkabanikh@math.nsc.ru

Динамика распространения эпидемии может быть описана в рамках SIR-моделей, введенными в 1927 году Кермаком и МакКендриком [1]. Недавняя эпидемия COVID-19 показала необходимость учитывать при моделировании и построении сценариев распространения эпидемий пространственную и возрастную неоднородности, социально-экономические факторы (изоляция населения, вакцинация) и ограничительные меры. Для этого вводятся модели управления средним полем (MFC), позволяющие при достаточно большом

числе агентов перейти к описанию динамики и управления репрезентативным агентом, который стремится минимизировать сумму всех затрат, представленных в виде функционала стоимости [2, 3]

$$J(\alpha(x, t), m(x, t)) = \int_{\Omega} \int_t^T f(x, t, m(x, t), \alpha(x, t)) \cdot m(x, t) dt dx + \quad (1)$$

$$+ h(x, m(x, T)) \cdot m(x, T) dx.$$

Здесь $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ может характеризовать пространственную неоднородность, возраст, степень изоляции агента, $m(x, t)$ удовлетворяет системе уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка (КФП):

$$\frac{\partial m(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \nabla^2 [\sigma(x, t) m(x, t)] - \operatorname{div}[g(x, t, \alpha(x, t)) m(x, t)], \quad (2)$$

$$m(x, 0) = m_0(x).$$

Здесь $g(x, t, \alpha(x, t))$ - функция стоимости управления, σ - дисперсия случайного блуждания агентов, $\alpha(x, t)$ - функция управления или стратегия игрока, f и h - номинальная и терминальная стоимости затрат на передвижение агентов. В случае SIR-модели вектор-функция $m(x, t)$ описывает плотность агентов для каждой группы чувствительных $m_S(x, t)$, инфицированных $m_I(x, t)$ и иммунных $m_R(x, t)$, сохраняя при этом закон действующих масс [4].

Применяя принцип максимум Понтрягина и метод множителей Лагранжа система уравнений управления средним полем сводится к совместному решению систем КФП и Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + g \cdot \nabla \psi(x, t) + \frac{1}{2} \sigma \cdot \nabla^2 \psi(x, t) + \frac{\partial f}{\partial m} m(x, t) + f = 0,$$

$$\psi(x, T) = h(x, m(x, T)) + \frac{\partial h}{\partial m} m(x, T)$$

с учетом условия оптимальности

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \nabla \psi(x, t) \cdot \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0.$$

В работе будут построены и численно исследованы постановки задач управления средним полем для построения сценариев распространения эпидемического процесса в зависимости от полноты данных: учет пространственной неоднородности, самоизоляции некоторых групп населения, вакцинация [5, 6].

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2024-0002.

Список литературы

- [1] Kermack O.W., McKendrick A.G. *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, V. 115, No. 772 (1927), 700–721.
- [2] Lee W., Liu S., Tembine H., Li W., Osher S. *Controlling propagation of epidemics via mean-field control*, SIAM J. Appl. Math., V. 81, No. 1 (2021), 190–207.
- [3] Petrakova V., Krivorotko O. *Mean field game for modeling of covid-19 spread*, J. Math. Anal. Appl., V. 514, No. 1 (2022), 126271.
- [4] Petrakova V., Krivorotko O., Neverov A. *Review of the mean field models for predicting the spread of viral infections*, 2023 IEEE CSGB (2023), 45–50.
- [5] Krivorotko O., Kabanikhin S. *Artificial intelligence for COVID-19 spread modeling*, J. Inverse Ill-Posed Probl., V. 32, No. 2 (2024), 297–332.
- [6] Кабанихин С.И., Криворотко О.И., Неверов А.В. *Дифференциальные модели эпидемий и сценарии ограничительных мер*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2025 (в печати).

ОЦЕНКА ВЕДУЩЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА МЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

КУЛАЕВ Р.Ч.

Северо-Осетинский государственный университет имени Коста Левановича
Хетагурова, Россия
kulaevrch@mail.ru

Изучается краевая задача на собственные значения для дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля на графе Γ с граничными условиями Дирихле [1]:

$$Lu(x) = \lambda \rho(x)u, \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Оператор $L : D \rightarrow C[\Gamma]$ задается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка на каждом ребре графа Γ , а в каждой узловой вершине графа оператор L задается условием трансмиссии:

$$D = \{u \in C^2[\Gamma] : u \text{ непрерывна на } \Gamma\},$$

$$Lu(x) \equiv \begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)u, & x \in E(\Gamma), \\ - \sum_{i \in I(x)} (p_i u'_i)(x) + q(x)u, & x \in N(\Gamma), \end{cases} \quad (2)$$

где $E(\Gamma)$ – множеством точек ребер графа, $N(\Gamma)$ – множество внутренних вершин; $p \in C^1[E(\Gamma)]$, $\inf_{E(\Gamma)} p > 0$ и $q, \rho \in C[E(\Gamma)]$, $q \geq 0$ на Γ , $\inf_{E(\Gamma)} \rho > 0$ на $E(\Gamma)$ и $\rho \geq 0$ на $N(\Gamma)$.

Вместе с оператором L рассматривается оператор $\mathcal{L} : D \rightarrow C[\Gamma]$, порождаемый теми же соотношениями с заменой коэффициентов p, q на $\mathcal{P} \in C^1[E(\Gamma)]$ и $\mathcal{Q} \in C[\Gamma]$ соответственно. Причем $\inf_{x \in E(\Gamma)} \mathcal{P}(x) > 0$.

Рассмотрим коэффициент ρ из правой части уравнения (1) и введем обозначения: $N_\rho(\Gamma) = \{a \in N(\Gamma) | \rho(a) > 0\}$, $\Gamma_\rho = E(\Gamma) \cup N_\rho(\Gamma)$.

Теорема 1. Пусть λ_0 – наименьшее собственное краевой задачи (1), а u_0 – соответствующая собственная функция. Пусть, далее, v – произвольная функция из D , удовлетворяющая условиям:

- (i) $\inf_{x \in \Gamma} v(x) > 0$;
- (ii) $\mathcal{L}v(x) \geq 0$ на $N(\Gamma) \setminus N_\rho(\Gamma)$.

Если $\mathcal{V}[u_0] \geq 0$, то

$$\lambda_0 \geq \inf_{x \in \Gamma_\rho} \frac{\mathcal{L}v}{\rho v}. \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть Γ – дерево и $d(\Gamma)$ – диаметр графа. Тогда для наименьшего собственного значения лапласиана L_0 , порождаемого соотношениями (2) с коэффициентами $p \equiv 1$ и $q \equiv 0$, верна оценка $\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{(d(\Gamma))^2}$.

Если Γ – граф-дерево с узлами только четной кратности, то он допускает представление (декомпозицию) в виде объединения маршрутов

$$\Gamma = \bigcup_i \Gamma(a_i, b_i), \quad a_i, b_i \in \partial\Gamma, \quad (4)$$

такое, что пересечение $\Gamma(a_i, b_i) \cap \Gamma(a_j, b_j)$ двух различных маршрутов либо пусто, либо состоит из одной внутренней вершины $a_{ij} \in N(\Gamma)$.

Рассмотрим произвольное разбиение $P \in P(\Gamma)$ и соответствующее ему представление (4) графа. Введем обозначения: $l_i = |\Gamma(a_i, b_i)|$ – длина маршрута $\Gamma(a_i, b_i) \in P$; $l(P) = \max_i l_i$ – диаметр разбиения P ; $\ell(\Gamma) = \min_{P \in P(\Gamma)} l(P)$.

Теорема 3. Пусть в графе-дереве Γ кратность любой внутренней вершины четна. Тогда наименьшее собственное значение лапласиана L_0 удовлетворяет неравенству $\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{(\ell(\Gamma))^2}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение №075-02-2025-1530.

Список литературы

- [1] Покорный Ю.В., Пенкин О.М., и др. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*. Физматлит, М: 2004.

ДИНАМИКА РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИКИ “СПРОС-ПРЕДЛОЖЕНИЕ”

КУЛИКОВ А.Н.^{1,a}, КУЛИКОВ Д.А.^{1,b}

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия

^aanat_kulikov@mail.ru, ^bkulikov_d_a@mail.ru

Одной из наиболее известных математических моделей макроэкономики можно считать модель “спрос-предложение” (или “модель рынка одного товара”) (см., например, [1]). В первоначальной версии она представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка

$$\dot{p} = D(p) - S(p), \quad (1)$$

где $p(t) > 0$ – цена товара, $D(p)$ – спрос на него, а $S(p)$ – предложение товара. При этом

- 1) $D(p), S(p) \in C^\infty(0, \infty)$; 2) $D'(p) < 0, S'(p) > 0$;
3) $\lim_{p \rightarrow 0} D(p) = \infty, \lim_{p \rightarrow 0} S(p) = 0$; 4) $\lim_{p \rightarrow \infty} D(p) = 0, \lim_{p \rightarrow \infty} S(p) = \infty$.

ОДУ (1) имеет асимптотически устойчивое состояние равновесия $p(t) = p_0 > 0$. Такая ситуация явно противоречит экономической

практике. Например, для экономической динамики характерно наличие циклов. Противоречие можно преодолеть, если учесть дополнительные факторы.

Эффект запаздывания. Его учет приводит к необходимости анализа вместо ОДУ (1) дифференциального уравнения (ДУ) с отклоняющимся аргументом

$$\dot{p} = D(p_h) - S(p_h), \quad p_h = p(t - h), \quad (2)$$

где $h > 0$. Можно показать (см. [2]), что при всех h ДУ (2) имеет состояние равновесия $p(t) = p_0$. Но теперь при $h \in [0, H)$ это состояние асимптотически устойчиво, а при $h > H$ оно теряет устойчивость. При $h = H(1 + \gamma\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $\gamma = \pm 1$ в окрестности состояния равновесия $p(t) = p_0$ может существовать цикл при $\gamma = 1$ или $\gamma = -1$. Он устойчив, если $\gamma = 1$ и неустойчив, если $\gamma = -1$.

Наличие конкуренции. Пусть изучается динамика изменения цены двух идентичных товаров

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= D(p_{1h}) - S(p_{1h}) + \varepsilon c(p_{2h} - p_{1h}), \\ \dot{p}_2 &= D(p_{2h}) - S(p_{2h}) + \varepsilon c(p_{1h} - p_{2h}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $c \in R(c \neq 0)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \ll 1$. Последнее слагаемое в каждом из двух уравнений системы (3) призвано учесть конкуренцию [3,4].

Можно показать, что анализ поведения решений в окрестности состояния равновесия $p_1 = p_2 = p_0$ может быть сведен к анализу системы из двух ОДУ

$$\begin{aligned} w'_1 &= \gamma_1(1 + \frac{2}{\pi})w_1 - \gamma_2(1 + il)w_1|w_1|^2 - \nu(1 + \frac{2}{\pi})(w_2 - w_1), \\ w'_2 &= \gamma_1(1 + \frac{2}{\pi})w_2 - \gamma_2(1 + il)w_2|w_2|^2 - \nu(1 + \frac{2}{\pi})(w_1 - w_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $w_j = w_j(s) \in C$, $s = \varepsilon t$, $j = 1, 2$, $\gamma_1, \gamma_2 = \pm 1$, $l, \nu \in R$. Вывод системы (4) базируется на использовании метода интегральных (инвариантных) многообразий. Анализ системы (4) позволил показать, что система ДУ (3) может иметь циклы трех типов:

1) синхронный цикл; 2) противофазный цикл; 3) асимметричные циклы, у которых колебания подсистем имеют разные амплитуды и разность фаз отлична от 0 и π .

Список литературы

- [1] Zhang W. B. *Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics*. Springer-Verlag, Berlin: 1991.
- [2] Куликов Д.А. Эффект запаздывания и экономические циклы. Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз., 186 (2020), 41-50.
- [3] Kulikov A.N., Kulikov D.A., Radin M.A. *Synchronization of Fluctuations in the Interaction of Economies within the Framework of the Keynes's Business Cycle Model*. Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences, 25, № 1 (2021), 93-111.
- [4] Куликов А.Н., Куликов Д.А., Фролов Д.Г. Влияние конкуренции на динамику макроэкономических систем. Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз., 228 (2023), 20-31.

ОБ УСПОКОЕНИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ГЛОБАЛЬНЫМ СЖАТИЕМ НА ДЕРЕВЕ

ЛЕДНОВ А.П.

Саратовский университет, Саратов
lednovalexsandr@gmail.com

В работах [1, 2] на графы была перенесена задача об успокоении системы управления с постоянным запаздыванием [3, 4]. В настоящей работе рассматривается случай, когда запаздывание не постоянно, а является пропорциональным времени сжатия. На интервале этот случай был изучен в [5] для уравнения нейтрального типа.

Рассмотрим дерево $\mathcal{T}$ с множеством ребер $\{e_1, \dots, e_m\}$, внутренними вершинами $\{v_1, \dots, v_d\}$ и граничными $\{v_0, v_{d+1}, \dots, v_m\}$. Каждое ребро e_j имеет длину T_j , выходит из v_{k_j} и входит в v_j , где $k_1 = 0$. Множество $\{e_\nu\}_{\nu \in V_j}$, $j = \overline{0, d}$, где $V_j := \{\nu : k_\nu = j\}$, совпадает с множеством ребер, выходящих из v_j . Единственный простой путь между v_j и v_0 задается цепочкой ребер $\{e_{k_j^{<\nu>}}\}_{\nu=\overline{0, \nu_j}}$, $j = \overline{1, m}$, где $k_j^{<0>} := j$ и $k_j^{<\nu+1>} := k_{k_j^{<\nu>}}$, $\nu = \overline{0, \nu_j}$, а ν_j определяется условием $k_j^{<\nu_j>} = 1$.

Рассмотрим систему управления, заданную на дереве $\mathcal{T}$:

$$\ell_j y(t) := y'_j(t) + b_j y_j(t) + c_j y_j(q_j(t)) = u_j(t), \quad 0 < t < T_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

$$y_j(t) = y_{k_j}(t + T_{k_j}), \quad t \in (q_j(0), 0), \quad j = \overline{2, m}, \quad (2)$$

$$y_1(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \quad y_j(0) = y_{k_j}(T_{k_j}), \quad j = \overline{2, m}, \quad (3)$$

где $q_j(t) := q^{-1}(t - (q - 1)\tilde{T}_j)$, $\tilde{T}_j := \sum_{\nu=1}^{\nu_j} T_{k_j^{<\nu>}}$, $q > 1$ и $b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $u_j \in L_2(0, T_j)$, $j = \overline{1, m}$. Пусть $T_j > (q - 1)\tilde{T}_j$ при $j = \overline{2, m}$.

Требуется выбором управлений $u_j(t)$ привести систему (1)–(3) в состояние равновесия. Для этого достаточно найти $u_j(t) \in L_2(0, T_j)$, $j = \overline{1, m}$, обеспечивающие

$$y_j(t) = 0, \quad t \in [q_j(T_j), T_j], \quad j = \overline{d+1, m}, \quad (4)$$

Выполнение условий (4) гарантирует последующее спокойствие системы при $u_j(t) = 0$ для $t > T_j$ и $j = \overline{d+1, m}$. Минимизируя требуемые усилия $\|u_j\|_{L_2(0, T_j)}$, $j = \overline{1, m}$, приходим к вариационной задаче

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^{T_j} (\ell_j y(t))^2 dt \rightarrow \min \quad (5)$$

при условиях (2)–(4), где $\alpha_j > 0$ – фиксированные веса.

Обозначим через $\mathcal{B}$ краевую задачу

$$\alpha_j (\ell_j y(t))' = \alpha_j b_j \ell_j y(t) + \tilde{\ell}_j y(t), \quad 0 < t < l_j, \quad j = \overline{1, m},$$

при условиях (2)–(4) и условиях типа Кирхгофа

$$\alpha_j \ell_j y(T_j) = \sum_{\nu \in V_j} \alpha_\nu \ell_\nu y(0), \quad j = \overline{1, d},$$

где $l_j := T_j$, $j = \overline{1, d}$, $l_j := q_j(T_j)$, $j = \overline{d+1, m}$, и

$$\tilde{\ell}_j y(t) = \begin{cases} q \alpha_j c_j \ell_j y(q_j^{-1}(t)), & 0 < t < q_j(T_j), \quad j = \overline{1, m}, \\ q \sum_{i \in V_j} \alpha_i c_i \ell_i y(q_i^{-1}(t) - q T_j), & q_j(T_j) < t < T_j, \quad j = \overline{1, d}. \end{cases}$$

Теорема 1. Кортес $y = [y_1, \dots, y_m] \in W_2^1(\mathcal{T}) := \bigoplus_{j=1}^m W_2^1[0, T_j]$ является решением вариационной задачи (2)–(5) тогда и только тогда, когда он имеет дополнительную гладкость $y \in W_2^2(\tilde{\mathcal{T}}) := \bigoplus_{j=1}^m W_2^2[0, l_j]$ и является решением краевой задачи $\mathcal{B}$.

Теорема 2. Краевая задача $\mathcal{B}$ имеет единственное решение $y = [y_1, \dots, y_m] \in W_2^1(\mathcal{T}) \cap W_2^2(\tilde{\mathcal{T}})$. Кроме того, существует C такое, что $\|y\|_{W_2^1(\mathcal{T})} \leq C|y_0|$.

Работа поддержана РНФ, проект № 24-71-10003.

Список литературы

- [1] Buterin S. *On damping a control system with global aftereffect on quantum graphs: Stochastic interpretation*. Math. Meth. Appl. Sci., 48 (2025), 4310–4331.
- [2] Бутерин С.А. *Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последствием на дереве*. Мат. заметки, 115 (2024), 825–848.
- [3] Красовский Н.Н. *Теория управления движением*. М.: Наука, 1968.
- [4] Skubachevskii A. *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*. Birkhäuser, Basel, 1997.
- [5] Россковский Л.Е. *Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции*. СМФН, 54 (2014), РУДН, М., 3–138.

МОНОДРОМИЯ СИСТЕМ ЖОРДАНА-ПОХГАММЕРА

ЛЕКСИН В.П.

Государственный социально-гуманитарный университет, Россия
lexin_vp@mail.ru

Линейные пфаффовы системы на $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ вила

$$dy(z)_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\beta_j y_i(z) - \beta_i y_j(z)) \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} \quad (1)$$

называются системами Жордана-Похгаммера с параметрами $\beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$. Такие системы вполне интегрируемы в смысле Фробениуса. Фундаментальная матрица решений системы

$Y(z)$ имеет порядка n , а ее Элементы задаются интегралами гипергеометрического типа

$$y_{ij}(z_1, \dots, z_n) = \beta_i \int_{\gamma_j} \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt, \quad (2)$$

где $\Phi(t) = \prod_{j=1}^n (t - z_j)^{\beta_j}$, $t \in [0, 1]$, и $\gamma_j(t)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

так называемые малые петли, представляющие образующие в фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\})$.

Ветвление фундаментальной матрицы $Y(z)$ определяет

представление монодромии системы (1), которое есть некоторое представление

ρ группы крашенных кос. Если все параметры системы

равны между собой $\beta_1 = \beta = \dots = \beta_n = \lambda$,

то, используя инвариантность системы Жордана-Похгаммера относительно

перестановок координат, в работе [1] показано,

что представление монодромии ρ_n

эквивалентно матричному представлению Бурау группы кос B_n

в матрицы над кольцом многочленов Лорана от одной переменной,

и формальной переменной присвоено комплексное значение $e^{2\pi i \lambda}$.

В случае произвольных значений параметров

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ отсутствует инвариантность

системы Жордана-Похгаммера относительно перестановок координат,

то тогда получаем представление Гасснера

группы крашенных кос P_n в группу обратимых матриц

с элементами из кольца многочленов Лорана от n переменных.

Вид матриц для значений представления Гасснера

на стандартных образующих A_{ij} группы

крашенных кос указан в работе [4],

а их реализация как матриц монодромии некоторой системы

Жордана-Похгаммера при комплексных значениях формальных

переменных $e^{\pm 2\pi i \beta_k}$, $k = 1, \dots, n$ в работе [2].

Системы Жордана-Похгаммера связаны с системой

корней A_{n-1} , а именно, особенности этих систем

расположены на зеркалах отражения группы Коксетера

для системы корней A_{n-1} , то есть на диагональных

гиперплоскостях в $\mathbb{C}^n$.

Мы рассматриваем обобщения систем Жордана-Похгаммера и

утверждений об их монодромии на аналоги таких систем,

связанные с другими системами корней в стиле работы [3].

Список литературы

- [1] Т. Kohno, *Linear representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations*. Contemp. Math. 78 (1988), 339-363.

- [2] M. Kapovich, J. Millson, *Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation*. Canad. Math. Bull. 44(2001), 36-60.
- [3] V. Leksin, *Monodromy of Cherednik–Kohno–Veselov connections*. IRMA Lectures in Mathematical and Theoretical Physics: "Differential Equations and Quantum groups EMS Publishing House, 2007, 255-267.
- [4] Moran S. *Mathematical theory of knots and braids. An introduction*. North-Holland Mathematics studies 82, North-Holland-Amsterdam. New York. Oxford, Elsevier SPC.Inc. 1988.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА, ВКЛЮЧАЮЩЕГО ОПЕРАТОРЫ БЕССЕЛЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

ЛЯХОВ Л.Н.^{1,2,a}, БУЛАТОВ Ю.Н.^{2,b}

¹Воронежский государственный университет, Россия

²Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Россия

^alevnlya@mail.ru, ^by.bulatov@bk.ru

Пусть $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x : x_i > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : x_i \geq 0\}$, $i = \overline{1, n}$, $-\gamma = (-\gamma_1, \dots, -\gamma_n)$, $-\gamma_i \in (-1, 0)$.

В-Гиперболический оператор имеет вид:

$$\square_{-\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_{B_{-\gamma}}, \quad \Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{-\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1)$$

Весовая билинейная форма в $\mathbb{R}_n^+$ задана следующим выражением: $(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n^+} u(x) v(x) x^{-\gamma} dx$, $x^{-\gamma} dx = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} dx_i$. В качестве основного пространства функций рассматриваем подпространство Шварца $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ быстро убывающих вместе со всеми производными, четных по каждой координате аргумента [1, с.21]. Соответствующее пространство обобщенных функций и обозначается $S'_{ev, -\gamma}$.

Определение 1. Сингулярное распределение

$$(\delta_{-\gamma}, \varphi)_{-\gamma} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{x: 0 \leq |x| < \varepsilon\}} \delta_{-\gamma, \varepsilon}(x) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi(x) \in S_{ev}(\overline{\mathbb{R}_n^+}),$$

будем называть $\delta_{-\gamma}$ -распределением Дирака—Киприянова, принадлежащее пространству распределений $S'_{ev, -\gamma}$.

Локально интегрируемая функция $\mathcal{E}_{n,-\gamma}(x, t)$ называется фундаментальным решением оператора $\square_{-\gamma}$, если

$$\square_{-\gamma} \mathcal{E}_{n,-\gamma}(x, t) = \delta_{-\gamma}(|x|) \delta(t). \quad (2)$$

Фундаментальное решение будем искать в классе радиальных функций, тогда $(\square_{-\gamma} \mathcal{E}_{n,-\gamma}, \varphi)_{-\gamma} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}_n^+} \mathcal{E}_{n,-\gamma}(|x|, t) \square_{-\gamma} \varphi(|x|, t) x^{-\gamma} dx dt$.

Произведем сферическое преобразование координат и применим формулу Киприянова–Бельтрами [2], тогда оператор (1) примет вид одномерного В-гиперболического оператора «радиальной струны» $\square_{\gamma} = |S_1(n)|_{-\gamma} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 (B_{\beta})_r \right)$, $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $\beta = n - |\gamma| - 1$, где число $\beta > -1$ и $|S_1(n)|_{-\gamma}$ — площадь части взвешенной единичной сферы в $\mathbb{R}_n^+$ с центром в начале координат. Соответственно изменится равенство (2): $|S_1(n)|_{-\gamma} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 (B_{\beta})_r \right] \mathcal{E}_{n,-\gamma}(r, t) = \delta_{\beta}(r) \delta(t)$.

Особое значение приобретает индекс β оператора Бесселя, который может принять значения А) $-1 < \beta < 0$, В) $\beta = 0$, С) $\beta > 0$. Рассмотрим случай А), т.к. случай В) легко сводится к классической задаче, а случай С) изучен в работе [3].

Теорема 1. Пусть $-1 < \beta < 0$ и $\mu = \frac{\beta+1}{2}$. Фундаментальным решением оператора (1) с особенностью в начале координат является следующее распределение из пространства $S'_{ev,-\gamma}$:

$$\mathcal{E}_{n,-\gamma}(r, t) = \frac{1}{|S_1(n)|_{-\gamma}} \frac{\theta(t)}{\Gamma(\mu+1) a} \frac{2^{-2\mu} r^{2\mu}}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\mu-1}}{\sqrt{a^2 t^2 - \tau r^2}} d\tau.$$

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 24-21-00387.

Список литературы

- [1] Киприянов И.А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи*. Наука, М: 1997.
- [2] Ляхов Л.Н., Санина Е.Л. *Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения*. Дифф. уравнения, 56, №12 (2020), 1610–1620.

- [3] Киприянов И.А., Засорин Ю.В. *О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями и о принципе Гюйгенса*. Дифф. уравнения, 28, №3 (1992), 452-462.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

ЛЯХОВ Л.Н.^{1,2,a}, РОЩУПКИН С.А.^{2,b}

¹Воронежский государственный университет, Россия

²Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Россия

^alevnlya@mail.ru, ^broshupkinsa@mail.ru

Через $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$ обозначим подпространство пространства Шварца основных функций, четных по переменной x_i . Двойственное пространство S'_{ev} вводится на основе билинейной формы

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\Omega} u(x) v(x) x^{-\gamma} dx, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}_n^+ = \{x \geq 0\}, \quad -1 < -\gamma < 0.$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}^+$. Введем сингулярный дифференциальный оператор

$$\left(D_{B_{-\gamma}}^{\alpha} \right)_x = \left\{ \begin{array}{ll} B_{-\gamma}^{\alpha/2}, & \text{если } \alpha = 2k \\ \frac{d}{dx} B_{-\gamma}^{\alpha/2}, & \text{если } \alpha_i = 2k + 1 \end{array} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Линейный сингулярный обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами обозначим через

$$L(D_{B_{-\gamma}}) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha} D_{B_{-\gamma}}^{\alpha}, \quad \alpha_{2m} = 1.$$

Фундаментальное решение оператора $L(D_{B_{-\gamma}})$ определяется как регулярная обобщенная функция $\mathcal{E}_{-\gamma} \in S'_{ev, -\gamma}$, удовлетворяющая равенству $L(D_{B_{-\gamma}}) \mathcal{E}_{-\gamma} = \delta_{-\gamma}$ или, что тоже самое,

$$(\mathcal{E}_{-\gamma}, L(D_{B_{-\gamma}}) \varphi)_{-\gamma} = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in S_{ev}[0, \infty).$$

Следующая теорема представляет собой распространение результатов работы [1 теорема 1] на операторы Бесселя отрицательного параметра $-\gamma \in (-1, 0)$.

Теорема 1. Пусть $2m$ — натуральное число, $Z(t)$ — регулярный функционал из $S'_{ev, -\gamma}$ и пусть $\forall k=1, 2, \dots, 2m-2$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\gamma} D_{B_{-\gamma}}^k Z(t) = 0, \tag{1}$$

и при $k=2m-1$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\gamma} \frac{d}{dt} B_{-\gamma}^m Z(t) = 1, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (2)$$

Если в области $t > 0$ функция $Z = Z(t)$ удовлетворяет однородному сингулярному дифференциальному уравнению

$$L(D_{B_{-\gamma}} Z(t)) = 0, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (3)$$

то в смысле обобщенных функций S'_{ev} функция Z есть фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ в пространстве $L_2^{-\gamma}$.

Наиболее востребованным является случай $m = 1$. Формулировка упрощается. Вместо условий (1), (2), (3) требуется, чтобы

$$B_{-\gamma} Z(t) = 0, \quad t^{-\gamma} Z(t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{-\gamma} Z(t) = 0.$$

Следствие. Фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$ является функция $\mathcal{E}_{-\gamma}(t) = \frac{1}{\gamma+1} t^{\gamma+1}$.

Если известно фундаментальное решение оператора Бесселя с положительным параметром, то можно также воспользоваться соотношением Дарбу–Вайнштейна (см. [2], с 160).

$B_{-\gamma} = x^{2\mu} B_{\gamma} x^{-2\mu}$, $2\mu = \gamma + 1$. Для $\gamma > 0$ фундаментальное решение оператора B_{γ} получено в [3]. Воспользовавшись этим решением получено равенство $(\mathcal{E}_{-\gamma}, B_{-\gamma} \varphi)_{-\gamma} = (\mathcal{E}_{-\gamma}, x^{2\mu} B_{\gamma} x^{-2\mu} \varphi)_{-\gamma} = \varphi(0)$, доказательство которого оказалось более объемным, по сравнению с доказательством следствия из теоремы 1 и мы его не приводим.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 24-21-00387.

Список литературы

- [1] Ляхов Л.Н. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений с D_B -оператором Бесселя // Труды математического института им. В.А. Стеклова. — Москва, 2012. — Т. 278. — С. 148–160.
- [2] Катрахов В.В. Сингулярные краевые задачи. Воронеж, Научная книга. 2024. С.528.
- [3] Ляхов Л. Н., Санина Е.Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха // Математические заметки. — 2023. — Т. 113, № 4. — С. 517–528.

О ЗАДАЧЕ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ОДНОЙ ОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

МАТВЕЕВА О.П.

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий
Новгород, Россия
oltan.72@mail.ru

Система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \varkappa \nabla^2) v_t = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 w_l - \nabla p, \\ 0 = \nabla \cdot v, \\ \frac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad \alpha_l \in R_-, \end{array} \right. \quad (1)$$

моделирует динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта порядка $K > 0$ [1].

Задача Тейлора для системы (1) описывает ситуацию, когда жидкость занимает пространство между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами бесконечной длины.

Область $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3, 4$ (с кусочно-гладкой границей) выбирается так, чтобы на ее границе $\partial_1 \Omega$ выполнялось условие периодичности $(v(x, t)|_{\partial \Omega \cap \alpha} = v(x, t)|_{\partial \Omega \cap \beta}, \quad w_l(x, t)|_{\partial \Omega \cap \alpha} = w_l(x, t)|_{\partial \Omega \cap \beta}, \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad \partial \Omega \cap (\alpha \cup \beta) = \partial_1 \Omega, \forall t \in R)$.

Функция $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i = v_i(x, t)$, $x \in \Omega$ — ограниченная область с границей $\partial \Omega$ класса C^∞) имеет физический смысл скорости течения, функция $p = p(x, t)$ отвечает давлению жидкости. Параметры $\nu \in R_+$ и $\varkappa \in R$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно. Параметры $\beta_l \in R_+$, определяют время ретардации давления [2].

Рассматривается задача Тейлора для системы (1)

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= v_0(x), \quad w_l(x, 0) = w_{l0}(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ v(x, t) &= 0, \quad w_l(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in \partial_2 \Omega \times R, \\ v(x, t), \quad w_l(x, t) &\text{ удовлетворяют условию периодичности на } \partial_1 \Omega \times R. \end{aligned} \quad (2)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $u_0 \in B$. Тогда для некоторого $t_0 = t_0(u_0)$ существует единственное решение задачи (1), (2), являющееся квазистационарной траекторией,

$$u = (u_\sigma, 0, \bar{p}, w_1, \dots, w_K)$$

класса $C^\infty((-t_0, t_0); U)$ и такое, что $u \in B$ для всех $t \in (-t_0, t_0)$, где

$$B = \{u \in \tilde{U} : A_{\pi\pi}^{-1} \Pi A_{\pi\pi}^{-1} \tilde{B}(u_\sigma) = u_p,$$

$$u_\pi = 0, u_\sigma \in \mathbf{H}_\sigma^2, u_i \in \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2, i = 1, 2, \dots, K\} -$$

фазовое пространство задачи (1), (2).

Список литературы

- [1] Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и Олдройта / А.П. Осколков // Труды матем. ин-та АН СССР. - 1988. - № 179. - С. 126 - 164.
- [2] Матвеева О. П., Сукачева Т. Г. Однородная модель несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка / О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева Вестник Южно-Уральского государственного университета. Математика. Механика. Физика. - 2016. - Т. 8. - №3. - С. 22 - 30.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

МАТВЕЕВА И.И.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
i.matveeva@g.nsu.ru

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + C(t)\dot{y}(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t D(t, t-s)y(s) ds$$

$$+F\left(t, y(t), y(t-\tau), \dot{y}(t-\tau), \int_{t-\tau}^t P(t, t-s)y(s) ds\right), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t, s)$, $P(t, s)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными элементами, $\tau > 0$ — запаздывание, $F(t, u_1, \dots, u_4)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция, определяющая нелинейные члены. Запаздывание может быть постоянным или переменным, причем оно может быть неограниченным. Мы используем введенный в [1] достаточно широкий класс функционалов Ляпунова-Красовского вида:

$$\begin{aligned} &\langle H(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \rangle \\ &+ \int_{t-\tau}^t \langle K(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix} \rangle. \end{aligned}$$

Эти функционалы позволяют нам получать оценки для решений систем вида (1) на всей полупрямой. Используя эти оценки, мы можем сделать вывод об устойчивости решений. Установлены условия экспоненциальной устойчивости, получены оценки для скорости стабилизации решений на бесконечности и оценки для множеств притяжения.

Работа продолжает наши исследования асимптотических свойств решений неавтономных систем с запаздыванием (см., например, [2]–[6]).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00367, <https://rscf.ru/project/24-21-00367/>

Список литературы

- [1] Матвеева И.И. *Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами* Сибирский журнал индустриальной математики, 22 (2019), 96–103.
- [2] Demidenko G.V., Matveeva I.I. *The second Lyapunov method for time-delay systems*. Functional Differential Equations and Applications (Editors: Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S.). Series: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer Nature, Singapore, 379 (2021), 145–167.

- [3] Матвеева И. И. *Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием*. Сибирский математический журнал, 62 (2021), 583–598.
- [4] Matveeva I.I. *Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays*. Siberian Electronic Mathematical Reports, 18 (2021), 1689–1697.
- [5] Matveeva I.I. *Estimates for solutions to a class of nonlinear time-varying delay systems*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 42 (2021), 3497–3504.
- [6] Матвеева И.И. *Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с сосредоточенным и распределенным запаздываниями*. Журн. вычисл. матем. мат. физ., 64 (2024), 1486–1499.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ, ПОДКОВА И МИНИМАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

МАХРОВА Е.Н.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
elena_makhrova@inbox.ru

Под *континуумом* понимаем компактное связное метрическое пространство. *Дендритом* называется локально связный континуум, не содержащий дуг, гомеоморфных окружности. Из определения дендрита следует, что дендрит – одномерный континуум. Отметим, что дендриты появляются как множества Жюлиа в комплексных динамических системах [1], как предельные множества динамических систем размерности, большей 1 [2], [3], как аттракторы стягиваемых полигональных систем [4] и др.

Пусть X – дендрит. Точка $p \in X$ называется *концевой точкой дендрита* X , если $X \setminus \{p\}$ связно. Дендрит с конечным числом концевых точек называется *конечным деревом*.

Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение компактного метрического пространства. Значительный интерес и важность в динамических системах представляют минимальные множества, впервые обнаруженные Дж. Биркгофом. Непустое множество M в X называется *минимальным относительно f* , если оно замкнуто, инвариантно и не содержит собственных подмножеств, удовлетворяющих указанным свойствам. Периодическая орбита – простейший пример минимального множества.

Установлена связь между существованием конечных минимальных множеств с качественными и количественными характеристиками динамической системы, заданной на отрезке или конечном дереве (см, например, [5], [6]). Например, существование периодической точки периода, отличного от степени 2, у непрерывного отображения $f : I \rightarrow I$ отрезка I эквивалентно положительности топологической энтропии f и существованию подковы у некоторой итерации f^n , где $n \geq 1$. В [7] показано, что периоды периодических точек непрерывного отображения $f : X \rightarrow X$ дендрита X не определяют положительность или равенство нулю топологической энтропии отображения f и существование подковы у f^n при любом $n \geq 1$. Кроме этого, положительность топологической энтропии у указанного отображения не влечет существование подковы ни у какой итерации отображения f [8].

В докладе изучается связь между существованием бесконечных минимальных множеств, топологической энтропией и существованием подковы у непрерывного отображения f , заданного на дендрите (см., например, [9]).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00242, <https://rscf.ru/project/24-21-00242/>

Список литературы

- [1] Peitgen H.-O., Richter P. H. *The beauty of fractals: Images of complex dynamical systems*. Berlin: Springer, 1986.
- [2] Agronsky S. J., Ceder J. G. *What sets can be ω -limit sets in E^n* . Real Anal. Exchange, 17 (1991/1992), 97-109.
- [3] Balibrea F., Guirao Juan L. G. *Continua with empty interior as ω -limit set*. Appl. Gen. Topol., 6 (2005), 195–205.
- [4] Drozdov D., Tetenov A. *On the classification of fractal square dendrites*. Advances in the Theory of Nonlin. Anal. and its Applic., 7 (2003), 19-96.
- [5] Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. 280 с.
- [6] Alseda L., Ye X. *No division and the set of periods for tree maps*. Ergodic Theory Dynam. Systems, 15:2 (1995), 221-237.
- [7] Ефремова Л.С., Махрова Е.Н. *Динамика монотонных отображений дендритов* Матем. сб., 192:6 (2001), 15-30.

- [8] Kočan Z, Kornecká-Kurková V., Málek M. *Entropy, horseshoes and homoclinic trajectories on trees, graphs and dendrites*. Ergod. Theory and Dynam. Syst., XX (2010), 1-11.
- [9] Makhrova E.N. *Remarks on minimal sets on dendrites and finite graphs* J. Difference Equ. Appl. 29:9-12 (2023), 1313-1322.

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА С УПРАВЛЕНИЕМ В ПОЛУКРУГЕ

МАШТАКОВ А.П.

ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский, Россия
alexey.mashtakov@gmail.com

Рассматривается следующая задача на плоскости. Даны точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, липшицева кривая $\bar{\gamma} \subset \mathbb{R}^2$, соединяющая a_1 с a_0 , вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ и число $S \in \mathbb{R}$. Требуется найти кратчайшую липшицеву кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую a_0 с a_1 , монотонную в направлении $\vec{v}$, для которой замкнутая кривая $\gamma \cup \bar{\gamma}$ ограничивает в $\mathbb{R}^2$ область алгебраической площади S .

Введем декартовы координаты x, y на плоскости $\mathbb{R}^2$ с началом координат a_0 и направлением оси Ox вдоль вектора $\vec{v}$. Тогда $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (x_1, y_1)$, а кривая $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$ является решением следующей задачи быстрого действия.

Задана управляемая система

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1, \\ \dot{y} = u_2, \\ \dot{z} = \frac{1}{2}(xu_2 - yu_1), \end{cases} \quad (1)$$

где $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, а допустимые управления $u_i \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$ принимают значения из полукруга

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1, u_1 \geq 0\}. \quad (2)$$

По заданному конечному состоянию $q_1 = (x_1, y_1, S)$ требуется найти такие управления, что соответствующая траектория $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ переводит систему из $q_0 = (0, 0, 0)$ в q_1 за минимальное время

$$\gamma(0) = q_0, \quad \gamma(T) = q_1, \quad T \rightarrow \min. \quad (3)$$

Управляемая система (1) задается левоинвариантными векторными полями на группе Гейзенберга. Случай, когда множество допустимых управлений является целым кругом, представляет собой хорошо известную задачу Дидоны [1]. Она была рассмотрена в работах [2, 3]. Полное решение и анализ его свойств приводится в работе [4].

Мотивация исследования исходит из геометрической теории управления и ее приложений. Задача является модельным примером с асимметричным множеством допустимых управлений, содержащим ноль на границе. Управляемая система является нильпотентной аппроксимацией модели автомобиля, который может двигаться вперед по заданной поверхности или поворачивать на месте. Оптимальные траектории такой системы используются для обнаружения выделяющихся кривых на изображениях. Родственная задача на группе движений плоскости исследована в [5].

В работе найдено множество достижимости и сформулированы условия существования оптимальных траекторий. Из принципа максимума Понтрягина найден явный вид экстремальных траекторий. Исследована оптимальность экстремалей и описана структура оптимального синтеза.

Теорема 1. *Множество достижимости системы (1) имеет вид*

$$\mathcal{A} = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\} \cup \{q \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\}.$$

Для любого $q \in \mathcal{A}$ существует единственная оптимальная траектория, приходящая в q . Оптимальная траектория на плоскости x, y состоит не более чем из трех сегментов следующего вида: 1) движение по прямой вдоль оси Oy ; 2) движение по дуге окружности; 3) движение по прямой вдоль оси Oy .

Список литературы

- [1] Сачков Ю.Л. *Введение в геометрическую теорию управления*. URSS, М:2021.
- [2] Gaveau B. *Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimees sous elliptiques sur certains groupes nilpotents*. Acta Math., 139(1977), 95-153.
- [3] Brockett R.W. *Control theory and singular Riemannian geometry*. New Directions in Applied Mathematics, 1982, 11-27.

- [4] Вершик А.М., Гершкович В.Я. *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи*. Итоги науки и техники: Совр. проблемы математики, Фунд. направл., 16(1987), 5-85.
- [5] Маштаков А.П. *Задача быстрогодействия на группе движений плоскости с управлением в полукруге*. Матем. сб. 213(2022), 100-122.

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ОРЛОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФИЦИЕНТАМИ – РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

МИРЗОЕВ К.А.^{1,2,a}, КОНЕЧНАЯ Н.Н.^{3,b}

¹МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия

²Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

³Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова,
Россия

^amirzoev.karahan@mail.ru, ^bn.konechnaya@narfu.ru

В докладе, следуя работе [1], будет представлена конструкция, позволяющая определить, в каком смысле следует трактовать дифференциальное уравнение вида

$$l_{2n}(y) := \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} (p_k^{(k)} y^{(n-k)})^{(n-k)} + \\ + i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \{ (q_k^{(k)} y^{(n-k-1)})^{(n-k)} + (q_k^{(k)} y^{(n-k)})^{(n-k-1)} \} = \lambda y,$$

где λ — фиксированный комплексный параметр, а все производные понимаются в смысле теории распределений. Далее, используя эту конструкцию, будет найден главный член асимптотики на бесконечности некоторой фундаментальной системы решений уравнения $l_{2n}(y) = \lambda y$.

Пусть существуют число $\nu > 0$, комплексные числа $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ и комплекснозначные функции $r_0, \dots, r_n, s_0, \dots, s_{n-1}$ такие, что $a_0 \neq 0$ и при всех $x \geq 1$ функции $p_0, p_1, \dots, p_n, q_0, \dots, q_{n-1}$ определяются равенствами

$$p_0(x) := x^{2n+\nu} / ((1/a_0) + r_0(x)), \quad q_0(x) := x^{2n+\nu} (b_0 + s_0(x)), \\ p_k(x) := x^{2n+\nu-k} (\alpha_k + r_k(x)), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$q_{k-1}(x) := x^{2n+\nu-k}(\beta_{k-1} + s_{k-1}(x)), \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

где $\alpha_1 = a_1/(2n + \nu - 1)$, $\alpha_k = a_k / \prod_{j=0}^{k-1} (2n + \nu - k - j)$ и

$$\beta_{k-1} = b_{k-1} / \prod_{j=0}^{k-2} (2n + \nu - k - j), \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Определим многочлен

$$\begin{aligned} F_{2n}(z, \nu) = & (-1)^n a_n + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} a_{n-k} \prod_{j=0}^{k-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] + \\ & + 2i \left(z + \frac{\nu}{2} \right) \left((-1)^n b_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} b_{n-1-k} \prod_{j=0}^{k-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] \right). \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть

$$\frac{(\ln x)^{r-1}}{x} \left(|r_0| + (1 + |r_0|) \sum_{j=0}^{n-1} (|r_{j+1}| + |s_j| + |r_{j+1}|^2 + |s_j|^2) \right) \in L^1[1; +\infty),$$

где r — наибольшее из чисел, равных кратностям корней многочлена $F_{2n}(z, \nu)$. Тогда уравнение $l_{2n}(y) = \lambda y$ имеет подсистему фундаментальных решений y_j , $j = 1, 2, \dots, l_1$, вида

$$y_j^{[s-1]}(x) = x^{z_1-s+1/2} (\ln x)^{j-1} (c_s + o(1)), \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

$$y_j^{[n+s-1]}(x) = x^{z_1+n+\nu-s+1/2} (\ln x)^{j-1} (c_{n+s} + o(1)), \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Такую же асимптотику имеет и другая подсистема решений y_j , $j = l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2$, отвечающая корню z_2 многочлена $F_{2n}(z, \nu)$ кратности l_2 и т.д.

Работа поддержана РНФ, проект 25-11-00304.

Список литературы

- [1] Mirzoev K. A., Shkalikov A. A. *Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями*. Математические заметки, Т. 99, вып.5 (2016), 788–793.

УСРЕДНЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА НА КРАЮ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛАКУНЫ: ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ

МИШУЛОВИЧ А.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
st062829@student.spbu.ru

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка $\mathcal{A}_\varepsilon$, порожденный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1} \mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D} (\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad g := \tilde{g} \omega^2, \quad \mathbf{D} = -i\nabla;$$
$$\omega^\varepsilon(\mathbf{x}) := \omega(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad g^\varepsilon(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Предполагается, что $\tilde{g}$ является $\mathbb{Z}^d$ -периодической симметричной $(d \times d)$ -матрицей-функцией с вещественными элементами. Функция ω считается измеримой и $\mathbb{Z}^d$ -периодической. Кроме того,

$$c_0 \mathbf{1} \leq \tilde{g}(\mathbf{x}) \leq c_1 \mathbf{1}, \quad 0 < c_0 \leq c_1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$
$$\|\omega\|_{L_2(\Omega)} = 1, \quad 0 < \omega_0 \leq \omega(\mathbf{x}) \leq \omega_1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

где $\Omega := [0, 1)^d$ — элементарная ячейка решетки $\mathbb{Z}^d$. Точное определение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ дается через полуограниченную замкнутую в $L_2(\mathbb{R}^d)$ квадратичную форму.

Известно, что спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет зонную структуру: он является объединением замкнутых отрезков (спектральных зон). Зоны могут перекрываться. Между зонами могут открываться лакуны. Согласно гипотезе Бете-Зоммерфельда, в многомерном случае число лакун конечно.

Множество

$$\mathcal{H}_\varepsilon^1(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in L_2(\mathbb{R}^d) : (\omega^\varepsilon)^{-1} u \in H^1(\mathbb{R}^d) \right\}$$

назовем “энергетическим пространством”; это гильбертово пространство относительно нормы $\|u\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^1(\mathbb{R}^d)} = \|(\omega^\varepsilon)^{-1} u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$.

В докладе будет описана аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ в регулярной точке оператора, близкой к краю внутренней спектральной лакуны, по “энергетической” норме (т.е. по операторной норме из пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $\mathcal{H}_\varepsilon^1(\mathbb{R}^d)$).

Исследование поддержано Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–15–2022–287 от 06.04.2022).

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЭНТРОПИЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕРОЗНАЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

МУКМИНОВ Ф.Х.

ИМВИЦ УФИЦ РАН, Россия

mfarith@yandex.ru

В области Ω пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассматривается уравнение

$$-\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u)) + b_0(x, u, \nabla u) + b_1(x, u)\mu = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad (1)$$

где μ - неотрицательная мера Радона. На границе $\partial\Omega$ ставится условие Неймана $(a(x, u, \nabla u), \mathbf{n}) = 0$.

Функция Музилака-Орлича $M(x, z)$ удовлетворяет условию ϕ -регулярности ($\log$ -условие) и $\bar{M}$ удовлетворяет Δ_2 -условию и тогда выполнено неравенство $\beta\lambda^p < M(x, \lambda)$, $\lambda > k_0$.

Для любого $R > 0$ определим пересечение области с шаром

$$\Omega_R = \{x \in \Omega \mid |x| < R\}.$$

Для элементов пространства $W := \{u \in L_{1,\text{loc}}(\bar{\Omega}), |\nabla u| \in L_M(\Omega)\}$ будем использовать норму $\|u\|_W := \|u\|_{L_1(\Omega_{r_1})} + \|\nabla u\|_M$. Будем писать $u \in \mathcal{T}_M^1(\Omega)$, если $T_k(u) \in W$ при всех $k > 0$.

Пусть μ – мера Радона из класса Морри $\mu \in \mathbb{M}_{\hat{s}}(\Omega)$, $\hat{s} > \frac{np}{np+p-n}$.

Функция потока $a(x, r, z)$ в (1) строго монотонна и удовлетворяет при $x \in \Omega$ условиям ограниченности, с возрастающей функцией $g(s)$, $s \geq 0$, $\widehat{d} > 0$, и функцией $G(x) \in L_1(\Omega)$,

$$\overline{M}(x, |a(x, r, y)|) \leq g(|r|) \left(G(x) + M(x, \widehat{d}|y|) \right), \quad r \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

коэрцитивности

$$(a(x, r, y), y) \geq c_0 M(x, |y|) - G(x), \quad r \in \mathbb{R}, \quad c_0 > 0. \quad (3)$$

Каратеодориевы функции b_i удовлетворяют неравенствам:

$$|b_0(x, s, y)| \leq g(r)(\widetilde{G}_0(x) + M(x, |y|)), |s| \leq r, |x| \leq r, \forall r > 0, \quad (4)$$

$$|b_1(x, s)| \leq g(r)\widetilde{G}_1(x), |s| \leq r, |x| \leq r, \quad (5)$$

где $\widetilde{G}_0 \in L_{1,\text{loc}}(\overline{\Omega})$, $\widetilde{G}_1 \in L_{1,\mu,\text{loc}}(\overline{\Omega})$;

$$b_0(x, r, y)r \geq 0, \quad b_1(x, r)r \geq 0, \quad r \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Понадобится также следующее условие: существует неубывающая функция $g_0(s)$, $s \geq 0$, $\lim_{s \rightarrow \infty} g_0(s) = \infty$, такая, что

$$|b_0(x, r, y)| \geq g_0(|r|) \geq 0, \quad r \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

ЭНТРОПИЙНЫМ решением задачи Неймана для уравнения (1) называется функция $u \in \mathcal{T}_M^1(\Omega)$ такая, что при всех $k > 0$, $\xi \in \mathcal{D}_\Gamma(\Omega)$ конечны интегралы, входящие в неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ((a(x, u, \nabla u), \nabla T_k(u - \xi)) + (b_0(x, u, \nabla u) - f)T_k(u - \xi))dx + \\ & + \int_{\Omega} b_1(x, u)T_k(u - \xi)d\mu \leq 0. \end{aligned}$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. Пусть область Ω обладает сегментным свойством, выполнены изложенные выше условия, а также (2)–(7).

Тогда существует энтропийное решение задачи Неймана для уравнения (1).

Пусть $(a(x, r, y) - a(x, r_1, z), y - z) + C(r_0)(2G(x) + (a(x, r, y), y) + (a(x, r_1, z), z))|r - r_1| \geq 0$,

функции $b_i(x, s)$, $i = 0, 1$ возрастают по s и выполнены неравенства

$$|b_0(x, s)| \leq \widehat{G}_0(x), |s| \leq 1, x \in \Omega; \quad |b_1(x, s)| \leq \widehat{G}_1(x), |s| \leq 1, x \in \Omega;$$

где $\widehat{G}_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{G}_1 \in L_{1,\mu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда решение единственно.

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ПО НЕРАВЕНСТВАМ ТИПА СТЕКЛОВА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

НАЗАРОВ А.И.

ПОМИ РАН, Россия

Санкт-Петербургский госуниверситет, Россия

al.il.nazarov@gmail.com

Мы рассмотрим следующее неравенство:

$$\|u^{(k)}\|_{L^q(0,1)} \leq \lambda \|u^{(n)}\|_{L^p(0,1)}, \quad u \in \overset{\circ}{W}_p^n(0,1) \quad (1)$$

(здесь $n, k \in \mathbb{Z}_+$, $n > k$ и $\lambda = \lambda(n, k, p, q)$).

При $n = 1$ и $k = 0$ точная константа в (1) была впервые вычислена В.А. Стекловым [1] для $p = q = 2$, а общий ответ был получен Э. Шмидтом [2] (для эквивалентной задачи). Соответствующая экстремальная функция четна относительно точки $x = \frac{1}{2}$.

Задача о точной константе при $n > 1$ существенно сложнее, и первые общие результаты здесь появились только в 90-х годах прошлого века. При этом во многих случаях экстремальная функция оказывается асимметричной. Имеющиеся результаты позволили выдвинуть следующую гипотезу (см. [3]).

Гипотеза. Если k четно, то экстремальная функция в задаче (1) четна относительно точки $x = \frac{1}{2}$ при всех допустимых n, p, q (кроме случая $p = 1$, $q = \infty$, $n = k + 1$, когда экстремальная функция может быть как симметричной, так и асимметричной). Если же k нечетно, то для всех допустимых n и p существует $\widehat{q}(n, k, p) > p$, такая, что экстремальная функция четна относительно $x = \frac{1}{2}$ при $q \leq \widehat{q}$ и не обладает симметрией при $q > \widehat{q}$.

В докладе, основанном на работе [4], будет дан обзор недавних результатов в этой задаче.

Список литературы

- [1] Stekloff W. *Problème de refroidissement d'une barre hétérogène*. Ann. fac. sci. Toulouse. Sér. 2, 3:3 (1901), 281–313.
- [2] Schmidt E. *Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet*, Math. Ann., 117:1 (1940), 301–326.
- [3] Мукосеева Е.В., Назаров А.И. *О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения*. Зап. научн. сем. ПОМИ, 425 (2014), 35–45. Corrigendum: Зап. научн. сем. ПОМИ, 489 (2020), 225.
- [4] Nazarov A.I., Shcheglova A.P., *Steklov-type 1D inequalities (a survey)*. Preprint available at <https://arxiv.org/abs/2101.10752v2>. 21p.

О ВНУТРЕННЕМ ПЕРЕХОДНОМ СЛОЕ В ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ С БОЛЬШОЙ АДВЕКЦИЕЙ

НИКУЛИН Е.И.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия
nikulin@physics.msu.ru

Рассмотрим сингулярно возмущенную краевую задачу с периодическим условием по времени:

$$\begin{aligned}
 N_\varepsilon(u) &:= \varepsilon \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - (\mathbf{A}(u, x, t), \nabla u) - B(u, x, t) = 0, \\
 (x, t) &\in D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2) \in G := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < a\}\}, \\
 \varepsilon &\in E_0 := \{\varepsilon \in \mathbb{R} : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}, \quad \mathbf{A}(u, x, t) = \{A_1(u, x, t), A_2(u, x, t)\}, \\
 u(0, x_2, t, \varepsilon) &= u^{(-)}(x_2, t) \text{ для } (x_2, t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2 \times E_0, \\
 u(a, x_2, t, \varepsilon) &= u^{(+)}(x_2, t) \text{ для } (x_2, t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2 \times E_0, \\
 u(x_1, x_2, t, \varepsilon) &= u(x_1, x_2, t + T, \varepsilon) \text{ для } (x, t, \varepsilon) \in \overline{G} \times \mathbb{R} \times E_0, \\
 u(x_1, x_2 + L, t, \varepsilon) &= u(x_1, x_2, t, \varepsilon) \text{ для } (x, t, \varepsilon) \in \overline{G} \times \mathbb{R} \times E_0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Сделаем следующие предположения.

(A1) *Функции $\mathbf{A}(u, x_1, x_2, t)$, $B(u, x_1, x_2, t)$, $u^{(-)}(x_2, t)$, $u^{(+)}(x_2, t)$ являются достаточно гладкими, T -периодическими по t и L -периодическими по x_2 .*

Вырожденное уравнение

$$(\mathbf{A}(u, x, t), \nabla u) + B(u, x, t) = 0 \quad (2)$$

— это нелинейное уравнение переноса, которое рассматривается при одном из следующих граничных условий:

$$u(x, t) = u^{(-)}(x_2, t) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma^{(-)} := \{x \in \overline{G} : x_1 = 0\} \quad (3)$$

$$\text{или } u(x, t) = u^{(+)}(x_2, t) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma^{(+)} := \{x \in \overline{G} : x_1 = a\}. \quad (4)$$

(A2) Краевые задачи (2), (3) и (2), (4) имеют классические решения $u(x, t) = \phi^{(-)}(x, t)$ и $u(x, t) = \phi^{(+)}(x, t)$, соответственно, которые определены при $(x, t) \in \overline{D}$, являются T -периодическими по t , L -периодическими по x_2 , и удовлетворяют неравенствам

$$\phi^{(-)}(x, t) < \phi^{(+)}(x, t) \quad \text{для} \quad (x, t) \in \overline{D},$$

$$A_1(\phi^{(-)}(x, t), x, t) > 0, \quad A_1(\phi^{(+)}(x, t), x, t) < 0 \quad \text{для} \quad (x, t) \in \overline{D}.$$

Введем функции $I_i(x, t) := \int_{\phi^{(-)}(x, t)}^{\phi^{(+)}(x, t)} A_i(u, x, t) du$, $i = 1, 2$.

Также предполагается выполнение условия (A3), в котором требуется, чтобы уравнение $I_1(h(x_2, t), x_2, t) - I_2(h(x_2, t), x_2, t) \frac{\partial h(x_2, t)}{\partial x_2} = 0$ имело решение $h_0 = h_0(x_2, t)$, удовлетворяющее для $(x_2, t) \in \mathbb{R}^2$ условию $0 < h_0(x_2, t) < a$, а также другим неравенствам. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть предположения (A1) – (A3) выполнены. Тогда для достаточно малого ε существует решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1), такое, что для любого малого, но фиксированного δ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x, t), x_1 \in [0, h_0(x_2, t) - \delta], (x_2, t) \in \mathbb{R}^2, \\ \varphi^{(+)}(x, t), x_1 \in [h_0(x_2, t) + \delta, a], (x_2, t) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Решение $u(x, t, \varepsilon)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову как решение соответствующей начально-краевой задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №23-1100069).

Список литературы

- [1] Hess P., Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity /P. Hess — Pitman Research Notes in Math. Series 247, Longman Scientific & Technical, 1991. — 139 p.
- [2] Nefedov N.N. Existence and Asymptotic Stability of Periodic Solutions with an Interior Layer of Reaction-Advection-Diffusion Equations / N. N. Nefedov, L. Recke, and K.R. Schneider // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — vol. 405, — pp. 90–103.

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ КУСОЧНО-ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОТОКА

ПАЛИН В.В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия
grey_stranger84@mail.ru

Будем рассматривать закон сохранения с разрывной функцией потока

$$u_t + (\Phi_L(u) + (\Phi_R(u) - \Phi_L(u))\theta(x))_x = 0 \quad (1)$$

с кусочно-постоянными начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_- + (u_+ - u_-)\theta(x). \quad (2)$$

В случае когда $\Phi_L(u) \neq \Phi_R(u)$, задачи вида (1),(2) представляют значительный интерес и являются объектом активного изучения (см. работы [1]–[4] и литературу в них). Пусть $\Phi_L(\cdot), \Phi_R(\cdot) \in C^2$.

Теорема 1 (Необходимое условие существования). *Пусть существует кусочно-гладкое обобщенное решение $u(t, x)$ уравнения (1). Пусть, кроме того, это решение инвариантно относительно однородных растяжений независимых переменных, и существует $R > 0$ такое, что при $|\frac{x}{t}| > R$ верно $u(t, x) = \text{const}$. Тогда существует кусочно-постоянное обобщенное решение уравнения (1), инвариантное относительно однородных растяжений независимых переменных.*

Введем необходимые определения и обозначения.

Пусть четная функция $\omega_1(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $\omega_1(x) > 0$ при всех $x \in (-1; 1)$, $\text{supp} \omega_1(x) = [-1; 1]$, и $h_1(x) = \int_{-\infty}^x \omega_1(y) dy$, $h_1(+\infty) = 1$. Рассмотрим систему ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau} = \Phi'_L(p) + (\Phi'_R(p) - \Phi'_L(p))h_1(q), \\ \frac{dp}{d\tau} = (\Phi_L(p) - \Phi_R(p))\omega_1(q) \end{cases}$$

Пусть S_τ^* – оператор сдвига вдоль траекторий этой системы на время τ , Λ_ε – оператор, задающийся равенством $\Lambda_\varepsilon(x, p) = (\varepsilon x, p)$. Пусть также γ_0 – кривая на фазовой плоскости (x, p) :

$$\gamma_0 = \{(x, u_-) \mid x < 0\} \cup \{(0, p) \mid (p - u_-)(p - u_+) \leq 0\} \cup \{(x, u_+) \mid x > 0\}.$$

Определение 1. Геометрическим решением задачи (1), (2) в момент времени t называется предел по Хаусдорфу последовательности кривых $\Lambda_\varepsilon S_{\frac{t}{\varepsilon}}^* \gamma_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$.

Теорема 2 (Достаточное условие существования.). Пусть функции $\Phi_L(p)$, $\Phi_R(p)$ и начальная кривая γ_0 удовлетворяют условиям:

- 1) Множество $\{p_0 \mid \Phi_L(p_0) = \Phi_R(p_0)\}$ не имеет точек сгущения.
- 2) Если $p_0 \in \mathbb{R}$ такова, что $\Phi_L(p_0) = \Phi_R(p_0)$, то $\Phi'_L(p_0)\Phi'_R(p_0) > 0$.
- 3) Функция $\Phi'_L(p)\Phi'_R(p)$ имеет конечное число нулей между любыми двумя прямыми $\{(q, p_0) \mid q \in \mathbb{R}, \Phi_L(p_0) = \Phi_R(p_0)\}$.
- 4) Найдется $R > 0$ такое, что $\forall A \in \gamma_0$ и $\forall \tau \in \mathbb{R}$ имеет место включение $S_\tau^* A \in \{-R < p < R\}$.
- 5) Найдутся $\hat{R} > 0$, $\varrho > 0$ такие, что $\forall p: |p| > \hat{R}$ имеют место неравенства $|\Phi'_L(p)| > \varrho$, $|\Phi'_R(p)| > \varrho$. Тогда существует единственное геометрическое решение задачи Римана (1), (2).

Замечание 1. Из существования геометрического решения задачи (1), (2) следует существование кусочно-гладкого решения.

Результаты основаны на совместной работе [5] с Г.М. Айбосиновой.

Список литературы

- [1] Andreianov B., Karlsen K.H., Risebro N.H. *A Theory of L1-Dissipative Solvers for Scalar Conservation Laws with Discontinuous Flux* Arch. Rat. Mech. Anal. vol. 201 (2011), pp. 27-86

- [2] Diehl S. *A uniqueness condition for non-linear convection-diffusion equations with discontinuous coefficients* J. Hyperbolic Differ. Equ. vol. 6(1) (2009), pp. 127-159
- [3] Vasseur A. *Well-posedness of scalar conservation laws with singular sources* Methods Appl. Anal. vol. 9:2(2002), pp. 291-312
- [4] Garavello M., Natalini R., Piccoli B., Terracina A. *Conservation laws with discontinuous flux* Netw. Heterog. Media, vol.2 (2007), pp. 157-179
- [5] Ayboshinova G.M., Palin V.V. *On the conditions for the existence of a piecewise smooth solution of the Riemann problem for one class of conservation laws*. Applicable Analysis (2025), pp. 1-18.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ПАНКРАТОВА Е.В.

МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, 119991, Россия
epankratova213@gmail.com

Классическое уравнение теплопроводности имеет существенный недостаток: согласно формуле Пуассона решения задачи Коши, изменение температуры в начальной точке тела влечет мгновенное изменение температуры в любой другой его точке, т.е. тепло распространяется с бесконечной скоростью. М. Гуртин и А. Пипкин предложили обобщенное линейное интегро-дифференциальное уравнение теплопроводности, устраняющее этот недостаток [1].

Рассмотрим операторную модель интегро-дифференциального уравнения Гуртина-Пипкина, а именно абстрактное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве H :

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \int_0^t Q(t-s) \frac{du(s)}{ds} ds + A^2 u(t) - \int_0^t K(t-s) A^2 u(s) ds = f(t) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(+0) = \varphi_0, u'(+0) = \varphi_1.$$

Здесь A — положительно определенный самосопряженный линейный оператор, имеющий компактный обратный. В качестве $Q(t)$ и $K(t)$ рассмотрим сингулярные ядра, предложенные Ю.Н. Работновым [2].

Проводится спектральный анализ оператор-функции, возникающей в результате применения преобразования Лапласа к левой части (1). Результат является обобщением и уточнением утверждения, полученного В.В. Власовым и Н.А. Раутиан для случая $Q \equiv 0$ [3].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы МГУ «Математические методы анализа сложных систем», а также Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Список литературы

- [1] Pipkin A.C., Gurtin M.E. *General theory of heat conduction with finite wave speeds*. Arch. for Rational Mech. and Anal. 1968. V.31. P. 113-126.
- [2] Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М. Наука, 1977.
- [3] Власов В.В., Раутиан Н.А. *Исследование операторных моделей, возникающих в теории вязкоупругости*. СМФН. 2018. V. 64. N1. P. 60–73.

ОБОВЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ ЭЙЛЕРА

ПАНОВ Е.Ю.

ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия
 НовГУ, Великий Новгород, Россия
 evpanov@yandex.ru

Рассмотрим соленоидальное векторное поле $a(x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и соответствующую линеаризованную систему уравнений Эйлера

$$u_t + \sum_{j=1}^n (a_j(x)u)_{x_j} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}_x u = 0, \quad (1)$$

где $(t, x) \in \Pi = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, неизвестный вектор скоростей $u = (u^1(t, x), \dots, u^n(t, x)) \in L_{loc}^\infty([0, +\infty), H)$, $H \subset L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ – вещественное гильбертово пространство соленоидальных векторных полей на $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot v(x) dx$$

(здесь “ $\cdot$ ” обозначает скалярное умножение в $\mathbb{R}^n$), а $p = p(t, x)$ – функция давления. Рассматривается задача Коши с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in H. \quad (2)$$

Определение 1. Вектор $u = u(t, x) \in L_{loc}^\infty([0, +\infty), H)$ называется обобщенным решением (о.р.) задачи (1), (2), если для любой пробной вектор-функции $f = f(t, x) \in C_0^1(\Pi, \mathbb{R}^n)$, такой что $\operatorname{div}_x f = 0$

$$\int_{\Pi} [u \cdot f_t + u \cdot (a \cdot \nabla_x) f] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \cdot f(0, x) dx = 0.$$

Выбор класса соленоидальных пробных векторов позволил исключить давление $p = p(t, x)$ из нашей системы.

Введем стационарный оператор Эйлера A_0 в соответствии с равенством $A_0 u = P v$, где $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap H = D(A_0)$, $v = v(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) u_{x_j}(x)$, а $P : L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow H$ – ортогональный проектор пространства $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ на его замкнутое подпространство H . Если $u_1 = (u_1^k)_{k=1}^n, u_2 = (u_2^k)_{k=1}^n \in D(A_0)$, то

$$\begin{aligned} (A_0 u_1, u_2) + (u_1, A_0 u_2) &= (P v_1, u_2) + (u_1, P v_2) = \\ (v_1, u_2) + (u_1, v_2) &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n a_j(x) ((u_1^k)_{x_j} u_2^k + u_1^k (u_2^k)_{x_j})(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n a_j(x) (u_1^k u_2^k)_{x_j} dx = 0 \end{aligned}$$

ввиду условия соленоидальности поля $a(x)$. Таким образом, оператор A_0 кососимметричен. Пусть A – замыкание оператора A_0 , A^* – оператор, сопряженный к A . Тогда $-A \subset A^*$. Обозначим

$d_{\pm} = d_{\pm}(A) = \text{codim Im}(E \pm A)$ индексы дефекта кососимметричного оператора A . Известно (см., например, [1, Теорема 4.3]), что существует m -диссипативное расширение B оператора $-A$. Тогда $-A \subset B \subset A^*$. Оператор B порождает сжимающую C_0 полугруппу операторов $T_t = e^{tB}$ в H .

Теорема 1. *Вектор-функции $u(t, x) = (T_t u_0)(x)$ являются о.р. задачи (1), (2) при всех $u_0 \in H$. Сжимающая полугруппа о.р. единственна тогда и только тогда, когда кососимметричный оператор A максимален. При этом, критерием единственности о.р. задачи (1), (2) является более сильное условие $d_- = 0$.*

Установлено также, что в классическом случае непрерывного по Липшицу вектора $a(x)$ оператор A кососопряжен, то есть $-A = A^*$. В соответствии с Теоремой 1 в этом случае существует единственное о.р. $u = e^{-tA} u_0(x)$. При этом, операторы e^{-tA} , $t \in \mathbb{R}$ образуют ортогональную группу, так что выполнено свойство сохранения энергии $\frac{1}{2} \|u(t, \cdot)\|_H^2 = \frac{1}{2} \|u_0\|_H^2$.

Список литературы

- [1] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*. Наука, М: 1967.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ТЕРМИНАХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ

ПЕРЕЛЬ М.В.^{1,a}, ГОРОДНИЦКИЙ Е.А.^b

¹Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

^am.perel@spbu.ru, ^bevgeny.gorodnitskiy@gmail.com

Рассмотрим обобщенное решение задачи

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x, y) - \Delta u(t, x, y) &= 0, \\ u(t, x, 0) &= f(t, x), \quad f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^2) \end{aligned} \tag{1}$$

в пространстве $\mathcal{H}_1$ [1]. Этому пространству принадлежат функции, представимые интегралом Фурье

$$u(t, x, y) = \int_{D_1} \hat{f}(\omega, k_x) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} d\omega dk_x, \quad k_y = \sqrt{\omega^2 - k_x^2},$$

$D_1 : k_x \in \mathbb{R}, \omega \geq |k_x|, \hat{f}(\omega, k_x) \in \mathbb{L}_2(D_1)$. В [2] дано представление решения в виде интегральной суперпозиции зависящих от параметров локализованных элементарных решений Ψ . Это представление получено формально из соотношения ортогональности для неприводимых представлений аффинной группы Пуанкаре [3], которое является частным случаем соотношения ортогональности для квадратично интегрируемых неприводимых представлений локально компактных групп [4]. Мы даем здесь теоремы о сходимости интегралов, приведенных в [2], см. [1].

Задача мотивирована проблемами сейсмоки.

Для построения элементарных решений выберем некоторое решение задачи (1), $\Psi(t, x, y)$, применим преобразования группы Пуанкаре (преобразования Лоренца и сдвиги) по переменным t и x и преобразование масштабирования по всем переменным:

$$U(g)\Psi(t, x, y) = \Psi_{g(a, \phi, t_s, x_s)}(t, x, y) \equiv \frac{1}{a} \Psi\left(\frac{t'}{a}, \frac{x'}{a}, \frac{y}{a}\right),$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} t - t_s \\ x - x_s \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}.$$

Интегральное представление имеет вид

$$u(t, x, y) = \frac{1}{c_\psi} \int_G F(g) \Psi_g(t, x, y) d\mu(g), \quad d\mu = dt_s dx_s d\phi \frac{da}{a^3}, \quad (2)$$

$$F(g) = (\psi, U(g)\Psi(\cdot, \cdot, 0)), \quad c_\psi = \int_{D_1} \frac{|\hat{\psi}(\omega, k_x)|^2}{\omega^2 - k_x^2} d\omega dk_x, \quad (3)$$

$$G : 0 < a < \infty, (\phi, t_s, x_s) \in \mathbb{R}^3, \quad \psi(t, x) \equiv \Psi(t, x, 0).$$

В определении $F(g)$ стоит стандартное скалярное произведение в $\mathbb{L}_2$.

Теорема 1. Пусть $\hat{f} \in \mathbb{L}_1(D_1)$, а ψ такова, что $0 < c_\psi < \infty$, см. (3). Тогда интеграл в формуле (2) сходится поточечно к u .

Теорема 2. Пусть $u(t, x, y) \in \mathcal{H}_1$. Пусть решение $\Psi(t, x, y) \in \mathcal{H}_1$, а $\psi(t, x)$ таково, что $0 < c_\psi < \infty$. Тогда 1) $\tilde{u}(t, x, y) \in \mathcal{H}_1$, где

$$\tilde{u}(t, x, y) = \frac{1}{c_\psi} \int_{A_1}^{A_2} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \int_{|\vec{\chi}_s| < \rho} F(g) \Psi_g(t, x, y) dt_s dx_s d\phi \frac{da}{a^3},$$

$0 < A_1 < A_2 < \infty$, $-\infty < \Phi_1 < \Phi_2 < \infty$, $|\vec{\chi}_s|^2 = c^2 t_s^2 + x_s^2$, $0 < \rho < \infty$,
2)

$$\lim_{\substack{A_1 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow \infty \\ \Phi_1 \rightarrow -\infty, \Phi_2 \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow \infty}} \|u(\cdot, \cdot, y) - \tilde{u}(\cdot, \cdot, y)\| = 0.$$

Список литературы

- [1] Городницкий Е. А., Перель М. В. *Обоснование основанной на вейвлетах интегральной формулы для решения волнового уравнения*. Зап. научн. сем. ПОМИ, 461.0 (2017), 107-123.
- [2] Perel M., Gorodnitskiy E. *Integral representations of solutions of the wave equation based on relativistic wavelets*. J. Phys. A: Math. Theor., 45 (2012), 385203.
- [3] Antoine J. P. et al *Two-dimensional wavelets and their relatives*. Cambridge University Press: 2008.
- [4] Grossman A., Morlet J., and Paul T. *Integral transforms associated to square integrable representations*. J. Math. Phys, 27 (1985), 2473-2479.

ОБ АСИМПТОТИКЕ САМОСОГЛАСОВАННЫХ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ

ПЕРЕСКОКОВ А.В.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Россия

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Россия
pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим спектральную задачу в $L^2(\mathbb{R}^3)$ для атома водорода в однородном магнитном поле, возмущенном самосогласованным полем

$$(\mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon^2 \mathbb{V}) \psi(x) = E \psi(x), \quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1. \quad (1)$$

Здесь

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \quad \mathbb{M}_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} ((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2) |\psi(x')|^2 dx', \quad (2)$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, Δ — оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Самосогласованный потенциал (2) представляет собой интегральную нелинейность типа Хартри.

Пусть числа $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $1 \ll n \lesssim \varepsilon^{-1/4}$ и $5^{-1/2}n < |m| < n$. Тогда у задачи (1) имеется серия асимптотических собственных значений

$$\begin{aligned} E_k = & -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m + \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^2(n^2 + m^2) + \\ & + \varepsilon^2 n^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{a}\xi^2/4} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{(|J_k^+(\theta, \xi)|^2 + |J_k^-(\theta, \xi)|^2) \cos^3 \theta}{\sqrt{a \cos^2 \theta - 1}} d\theta d\xi \times \\ & \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{a}\xi^2/4} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{(|J_k^+(\theta, \xi)|^2 + |J_k^-(\theta, \xi)|^2) \cos \theta}{\sqrt{a \cos^2 \theta - 1}} d\theta d\xi \right)^{-1} + \\ & + O(n^{-4-2/5}), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, $a = n^2/|m|^2$, $\theta_{\pm} = \pm \arccos(1/\sqrt{a})$, а функции $J_k^{\pm}(\theta, \xi)$ определены равенствами

$$\begin{aligned} J_k^{\pm}(\theta, \xi) = & \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left\{ \frac{\sqrt{5}\sqrt{a}\xi}{\sqrt[4]{5-a}} \frac{1}{2\sqrt{2}} (t \sin \theta \mp r \sqrt{\cos^2 \theta - a^{-1}}) + \frac{5\sqrt{a}}{4\sqrt{5-a}} \times \right. \\ & \times \left\{ -t^2 \left[\frac{(2\sqrt{a} - \sqrt{5-a})\sqrt{5-a}}{5a} + \sin^2 \theta \right] - \right. \\ & \left. - r^2 \left[\frac{(2\sqrt{a} - \sqrt{5-a})(4\sqrt{a} + \sqrt{5-a})}{5a} - \sin^2 \theta \right] \pm \right. \\ & \left. \pm 2tr \sin \theta \sqrt{\cos^2 \theta - a^{-1}} \right\} - \frac{i\sqrt{5}\sqrt{a}\xi}{\sqrt[4]{5-a}} \frac{1}{2\sqrt{2}} (r \sin \theta \pm t \sqrt{\cos^2 \theta - a^{-1}}) + \\ & + \frac{i5\sqrt{a}}{4\sqrt{5-a}} \left\{ \pm (t^2 - r^2) \sin \theta \sqrt{\cos^2 \theta - a^{-1}} - \right. \\ & \left. \left. - 2tr \left[\frac{(2\sqrt{a} - \sqrt{5-a})\sqrt{5-a}}{5a} - \sin^2 \theta \right] \right\} \right\} H_k(t + ir) dt dr. \end{aligned}$$

Здесь $H_k(z)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ — полиномы Эрмита. Формула (3) описывает расщепление спектра. Выражения для соответствующих асимптотических собственных функций приведены в [1]. Таким образом, на уравнения самосогласованного поля распространены методы, использованные ранее в [2, 3]. Отметим, что при таком обобщении приходится дополнительно вычислять асимптотику квантовых средних.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

Список литературы

- [1] Перескоков А.В. *Об асимптотике гипергеометрических когерентных состояний и собственных функций атома водорода в магнитном поле. Нахождение самосогласованных уровней энергии.* ТМФ, 222, № 3 (2025), 531-550.
- [2] Карасев М.В., Новикова Е.М. *Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле.* ТМФ, 108, № 3 (1996), 339-387.
- [3] Перескоков А.В. *Асимптотика спектра атома водорода в магнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров.* Тр. ММО, 73, № 2 (2012), 277-325.

О ДЕФОРМАЦИЯХ ФАВАРА МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

ПЕТРОВ В. Э.^{1,a}, ПЕТРОВ Ф. В.^{2,b}

¹ООО “ТВЭЛЛ”, Санкт-Петербург, Россия

²СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

^apetrov_twell@list.ru, ^bfedyapetrov@mail.ru

В теории ортогональных многочленов одним из основных является трехчленное рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют три последовательных многочлена [1, гл. 10]:

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)p_n(x) - C_n p_{n-1}(x). \quad (1)$$

Теорема Фавара [2] утверждает, что если A_n, B_n, C_n — вещественные числа при всех $n = 1, 2, \dots$, причем $A_n > 0$ и $C_n > 0$, то последовательность многочленов, заданная соотношением (1) и начальными условиями $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = ax + b$, $a > 0$, будет ортогональной относительно некоторой неотрицательной конечной меры Лебега-Стильтьеса на вещественной оси.

Для многочленов Якоби $W_n(x) := P_n^{(\alpha, -\alpha)}(x)$ рекуррентное соотношение типа (1) имеет вид

$$\begin{aligned} n(n+1)W_{n+1}(x) = \\ = n(2n+1)xW_n(x) - (n^2 - \alpha^2)W_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом $P_0^{(\alpha, -\alpha)}(x) = 1$, $P_1^{(\alpha, -\alpha)}(x) = x + \alpha$. Как видим, при замене α на $-\alpha$ меняется только многочлен W_1 , а рекуррентное соотношение (2) остается тем же. Это позволяет построить однопараметрическое семейство ортогональных (относительно некоторой меры) многочленов $W_n(x) = W_n^\theta(x)$, $\theta \in \mathbb{R}$, заданное условиями (2) и начальными условиями $W_0^\theta(x) = 1$, $W_1^\theta(x) = x + \theta$. При этом для значений $\theta = \pm\alpha$ получаются многочлены Якоби $P_n^{(\pm\alpha, \mp\alpha)}(x)$, ортогональные на $[-1, 1]$ по весу $(1-x)^{\pm\alpha}(1+x)^{\mp\alpha}$ – два линейно независимых решения рекуррентного уравнения (2). Поэтому многочлен $W_n^\theta(x)$ есть линейная комбинация этих решений:

$$W_n^\theta(x) = \mu P_n^{(\alpha, -\alpha)}(x) + \nu P_n^{(-\alpha, \alpha)}(x), \quad \mu + \nu = 1, \quad \theta = \alpha(\mu - \nu).$$

Меры, относительно которых ортогональны семейства $W_n^\theta(x)$ при других вещественных $\theta \neq \pm\alpha$, остаются в значительной степени загадочными. Мы обсуждаем некоторые их свойства.

Список литературы

- [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т. 2, СМБ, М., “Наука”, 1974.
- [2] Favard J., Sur les polynomes de Tchebicheff, Comptes Rendus de l’Acad. des Sc., Paris, **200** (1935), 2052-2053.

ПОЧТИ ЛОРЕНЦЕВЫ ЗАДАЧИ НА АЛЬФА-ПЛОСКОСТИ ГРУШИНА

ПЕТУХОВ В. С.^{1,a}, САЧКОВ Ю.Л.^{1,b}

¹ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия

^avladimir@sycore.org, ^byusachkov@gmail.com

В докладе рассмотрена почти лоренцева задача оптимального управления на плоскости Грушина в следующей обобщенной постановке:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \\ q &\in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \\ q(0) &= q_0 = (0, 0), \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1), \\ X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = |x|^\alpha \frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Исчерпывающе исследованы нормальные и аномальные оптимальные траектории (лоренцевы длиннейшие) с использованием принципа максимума Понтрягина для следующих классов управления и функционалов качества :

$$\begin{aligned}u \in U &= \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \geq |u_2|\}, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 - u_2^2} dt \rightarrow \max, \\ u \in U &= \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_2 \geq |u_1|\}, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_2^2 - u_1^2} dt \rightarrow \max, \\ u \in U &= \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1, u_2 \geq 0\}, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1 u_2} dt \rightarrow \max.\end{aligned}$$

Для частного случая $\alpha = 1$ вычислено множество достижимости, сферы и расстояние в лоренцевой метрике. Для общего случая $\alpha \geq 1$ исследовано существование экстремальных траекторий, в случае существования доказана их оптимальность.

Список литературы

- [1] Сачков Ю.Л., Введение в геометрическую теорию управления, URSS, (2021).

- [2] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint, Cambridge Univ. Press, 2019
- [3] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов

О ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАРДНЕРА

ПИКУЛИН С.В.^{1,a}, БЕЗРОДНЫХ С.И.^{1,b}

¹ФИЦ ИУ РАН, Россия

^aspikulin@gmail.com, ^bsbezrodnykh@mail.ru

В докладе представлен численно-аналитический метод решения следующей начально-краевой задачи для уравнения Гарднера:

$$\partial_t u + (\alpha u + \beta u^2) \partial_x u + \gamma \partial_{xxx}^3 u = f(x, t), \quad (1)$$

$$u = u(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \gamma > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u(L, t) = \psi_0(t), \quad \partial_x u(L, t) = \psi_1(t). \quad (3)$$

Уравнение (1) возникает, в том числе, при моделировании внутренних волн в океане, дисперсионных ударных волн, волн в конденсированной квантовой жидкости, а также ионно-звуковых волн в плазме.

Предлагаемый метод решения задачи (1)–(3) изложен в работе [1], продолжающей исследования [2, 3] по разработке численно-аналитических алгоритмов решения нелинейных, в том числе сингулярно возмущенных, начально-краевых параболических задач для уравнений типа Бюргера и Колмогорова – Петровского – Пискунова. Редукция к серии вспомогательных линейных задач проводится на основе явно-неявной схемы [4] дискретизации уравнения (1) по времени с приближением линейных членов по модифицированной неявной схеме Кранка – Николсона и явной экстраполяцией нелинейных членов по схеме Адамса – Бэшфорда.

Новизна предложенного метода заключается в способе решения линейной задачи относительно приближения $u_{n+1}(x) \approx u(t_{n+1}, x)$ на $(n+1)$ -м временном слое $t_{n+1} = (n+1)\tau$, где τ – шаг по времени:

$$\frac{1}{\omega^3} \frac{d^3}{dx^3} u_{n+1}(x) + u_{n+1}(x) = g_{n+1}(x), \quad \omega = \text{const} > 0, \quad (4)$$

$$u_{n+1}(0) = l_{n+1}, \quad u_{n+1}(L) = r_{n+1}, \quad \frac{du_{n+1}}{dx}(L) = r_{n+1}^{(1)}, \quad (5)$$

где $g_{n+1}(x)$ — известная функция, l_{n+1} , r_{n+1} , $r_{n+1}^{(1)}$ — некоторые заданные значения.

Решение задачи (4), (5) мы строим при каждом n в полуаналитическом виде с алгоритмической сложностью $O(K)$, где K — число элементов пространственной дискретизации, используя явный вид фундаментальной системы решений уравнения (4) без применения каких-либо разностных аппроксимаций производных искомой функции по переменной x .

При численной реализации построенного алгоритма применительно к тестовой задаче о распространении солитона удастся достичь результата с погрешностью $\sim 10^{-8}$, причем как для самого решения $u(x, t)$, так и для его производной $\partial_x u(x, t)$. Здесь погрешность оценена путем сопоставления результата с известным явным решением типа бегущей волны.

Применение разработанного численного алгоритма решения линейных задач типа (4), (5) не ограничивается только упомянутым модельным примером. Можно ожидать, что представленный алгоритм продемонстрирует свою эффективность для линейных задач, возникающих при итерационном решении широкого круга нелинейных уравнений.

Список литературы

- [1] Безродных С.И., Пикулин С.В. Об одном методе решения начально-краевой задачи для уравнения Гарднера // СМФН. 2025. (В печати.)
- [2] Безродных С.И., Пикулин С.В. Численно-аналитический метод для нелинейных уравнений типа Колмогорова – Петровского – Пискунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64. № 11. С. 2019–2045.
- [3] Безродных С.И., Пикулин С.В. Численно-аналитический метод для уравнения Бюргерса с периодическим краевым условием // СМФН. 2023. Т. 69. № 2. С. 208–223.
- [4] Hundsdorfer W., Verwer J. Numerical Solutions of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. 471 p.

ПРИНЦИП ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ

ПЛАМЕНЕВСКИЙ Б.А.^{1,a}, ПОРЕЦКИЙ А.С.^{1,b}, САРАФАНОВ О.В.^{1,c}

¹Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

^ab.plamenevskii@spbu.ru, ^ba.poretsky@spbu.ru, ^co.sarafanov@spbu.ru

Рассматривается двумерная отражательная дифракционная решетка, занимающая "полуплоскость" с гладкой периодической границей и описываемая неоднородной эллиптической краевой задачей для стационарного уравнения акустики с гладкими коэффициентами, периодически меняющимися вдоль границы решетки с тем же периодом. Предполагается, что эта задача самосопряжена относительно формулы Грина, а ее коэффициенты стабилизируются на бесконечном удалении от границы решетки к гладким периодическим функциям.

Принципом излучения мы называем теорему о существовании решения краевой задачи в решетке, главная часть асимптотики которого содержит только приходящие или только уходящие волны. В работе определяются приходящие и уходящие волны в решетке, доказывается принцип излучения и вычисляются амплитуды волн в асимптотике решения.

Работа поддержана Российским Научным Фондом, грант 22-21-00136.

БИФУРКАЦИИ В ОБОБЩЕННОМ УРАВНЕНИИ КАНА —КИЛЛАРДА

ПЛЫШЕВСКАЯ С.П.

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского, Россия
splyshevskaya@mail.ru

Исследуется обобщенное уравнение Кана — Хилларда:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + u + bu^2 - u^3 \right]. \quad (1)$$

Вместе с (1) будем рассматривать периодические краевые условия

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (2)$$

В результате замены в (1): $u(t, x) = v(t, x) + c$ получим краевую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} + \beta v + \gamma v^2 - v^3 \right], \quad (3)$$

$$v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \quad (4)$$

где $\beta = 1 + 2bc - 3c^2$, $\gamma = b - 3c$. Важно отметить, что из условия

$$M(v(t_0, x)) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t_0, x) dx = 0$$

следует выполнение при всех $t > t_0$ условия

$$M(v(t, x)) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что краевая задача (1), (2) изучалась в [1].

При исследовании локальной динамики краевой задачи (3)–(5) важную роль играет расположение корней λ_k характеристического уравнения для линеаризованной в нуле краевой задачи:

$$\lambda_k = -\alpha k^4 + ik^3\lambda + \beta k^2, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

Ниже будем предполагать, что имеет место критический случай. Пусть значение $c = c_0$ такое, что

$$\alpha = \beta = 1 + 2bc_0 - 3c_0^2. \quad (7)$$

Фиксируем произвольно значение c_1 и положим в (3)

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (8)$$

Далее исследуется поведение всех решений краевой задачи (3)–(5) из некоторой достаточно малой и независимой от ε окрестности нулевого состояния равновесия при условиях (7), (8).

В этом случае характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{\pm 1} = \pm i\lambda + O(\varepsilon)$, а все остальные его корни имеют отрицательные (и отделенные от мнимой оси) вещественные части. Тем самым выполнены условия бифуркации Андронова – Хопфа.

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$v = \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau) \exp(ix + i\lambda t) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-ix - i\lambda t)] + \varepsilon v_2(t, \tau, x) + \\ + \varepsilon^{3/2} v_3(t, \tau, x) + \dots \quad (9)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ — медленное «время»; функции $v_j(t, \tau, x)$ — $2\pi/\lambda$ -периодичны по t и 2π -периодичны по x .

Подставим (9) в (3)–(5) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. На третьем шаге для нахождения $v_3(t, \tau, x)$ приходим к краевой задаче, условие разрешимости которой в указанном классе функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\xi + \sigma\xi|\xi|^2, \quad (10)$$

в котором

$$\delta = 2\gamma c_1, \quad \sigma = 2A\gamma - 3, \quad A = 2\gamma[8\alpha - 2\beta_0 + 3i\lambda]^{-1}.$$

Отсюда и из общих утверждений вытекает следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\delta \neq 0$ и $\operatorname{Re} \sigma \neq 0$. Тогда при всех достаточно малых ε динамика уравнения (10) определяет локальную динамику краевой задачи (3)–(5).

Список литературы

- [1] Кащенко С.А. Бифуркации в уравнении Курамото — Сивашинского. Теоретическая и математическая физика, 192 (2017), 23-40.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА И СДВИГОМ В СВОБОДНОМ ЧЛЕНЕ

ПОЛЯКОВ Д.М.

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН, Россия
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Россия
DmitryPolyakow@mail.ru

Основным объектом исследования настоящей работы является одномерный оператор Шрёдингера на единичном отрезке, область определения которого задается краевыми условиями Неймана. При этом в качестве возмущения выступает оператор, содержащий оператор сдвига. Основная цель работы — получить представление для

собственных значений, которое представимо в виде равномерно сходящегося ряда по параметру сдвига. До настоящего момента подобные вопросы изучались в [1], [2] для ряда частных моделей, связанных с оператором второго порядка и малым параметром при второй производной. Кроме того, также отметим работу [3], в которой были получены необходимые и достаточные условия разрешимости функционально-дифференциальных пучков второго порядка, имеющих общий вид и нелинейную зависимость от спектрального параметра.

В пространстве $L_2(0, 1)$ рассматривается самосопряженный оператор $\mathcal{A}y = -y''$ на области определения $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \{y \in W_2^2(0, 1) : y'(0) = y'(1) = 0\}$. Через $\mathcal{L}$ мы обозначим оператор продолжения нулем вне интервала $(0, 1)$, который действует из $L_2(0, 1)$ в $L_2(\mathbb{R})$. При этом через $\mathcal{R}$ зададим оператор сужения на $(0, 1)$, действующий из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(0, 1)$. Таким образом, данные операторы определяются следующим образом:

$$\mathcal{L}y = \begin{cases} y & \text{в } (0, 1), \\ 0 & \text{вне } (0, 1), \end{cases} \quad \mathcal{R}y = y \quad \text{на } (0, 1).$$

Кроме того, мы зададим оператор сдвига $\mathcal{T}$, действующий в $L_2(\mathbb{R})$, вида

$$(\mathcal{T}(\alpha)y)(x) = y(x + \alpha), \quad x \in (0, 1),$$

где $\alpha \in [0, 1]$.

Пусть функция V является комплекснозначной из пространства $L_\infty(0, 1)$. Введем в рассмотрение в пространстве $L_2(0, 1)$ оператор $\mathcal{B}^\alpha$ вида $\mathcal{B}^\alpha y = V\mathcal{R}\mathcal{T}(\alpha)\mathcal{L}y$ для $y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathfrak{D}(\mathcal{B}^\alpha)$ и $\alpha \in [0, 1]$. Тогда основным объектом для изучения в настоящей работе будет нелокальный оператор $\mathcal{H}^\alpha = \mathcal{A} + \mathcal{B}^\alpha$, действующий в пространстве $L_2(0, 1)$, на области определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\alpha) = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Мы будем изучать поведение спектра этого оператора. Первый вспомогательный результат посвящен компактности резольвенты данного оператора. При этом его спектр состоит из счетного числа собственных значений λ_n , $n \in \mathbb{N}$, с единственной точкой накопления на бесконечности.

Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть V — комплекснозначная функция из $L_\infty(0, 1)$. Тогда для достаточно больших n имеет место следующее представление для собственных значений оператора $\mathcal{H}^\alpha$:

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi n + \frac{1}{\pi n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_i(n)}{(\pi n)^i}.$$

Данный ряд сходится равномерно по α .

Отметим, что коэффициенты C_i оцениваются некоторой постоянной, которая не зависит от n . Кроме того, для всех коэффициентов выписываются рекуррентные формулы для их нахождения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00009, <https://rscf.ru/project/23-11-00009/>.

Список литературы

- [1] Шкалик А.А. О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи. Матем. заметки., 62:6 (1997), 950-953.
- [2] Туманов С.Н., Шкалик А.А. О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда с профилем Пуазейля. Изв. РАН. Сер. матем., 66:4 (2002), 177-204.
- [3] Buterin S.A., Malyugina M.A., Shieh C.-T. An inverse spectral problem for second-order functional-differential pencils with two delays. Appl. Math. Comp., 411 (2021), 126475.

О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

ПОПОВА С.Н.^{1,a}, ФАХРАЗИЕВА Э.А.^{1,b}

¹Удмуртский государственный университет, Россия

^audsu.popova.sn@gmail.com, ^belmiraf12@mail.ru

Рассмотрим линейную однородную гибридную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k), \end{cases} \quad (1)$$

где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0 \doteq \{0, 1, 2, \dots\}$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, функция $A_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ограничена, кусочно непрерывна, может

иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; функции $A_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times n_2}$ ($j = 1, 2$) и $A_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ ограничены. Положим $n \doteq n_1 + n_2$. Систему (1) отождествим с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Множество всех систем вида (1), удовлетворяющих поставленным условиям, обозначим $\mathcal{M}_n$. Метрика в этом множестве — равномерная на $[0, +\infty)$.

Решением системы (1) называем функцию $z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$, такую, что $x(t)$ и $y(k)$ удовлетворяют системе (1) при $t \in (k, k+1)$, при этом функция $x(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$.

Пусть $X(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t)$. Положим

$$X_A(k+1, k) = \begin{pmatrix} X(k+1, k) & \int_k^{k+1} X(k+1, s) ds \cdot A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$X_A(k, l) = X_A(k, k-1)X_A(k-1, k-2) \dots X_A(l+1, l), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l.$$

Тогда для произвольного решения $z(\cdot)$ системы (1) имеет место равенство $z(k) = X_A(k, l)z(l)$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$. Будем называть матрицу $X_A(k, l)$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$, *матрицей (оператором) Коши* гибридной системы (1) в целочисленные моменты времени. Обозначим через $\mathcal{M}_n^0$ подмножество множества $\mathcal{M}_n$, состоящее из систем вида (1), для которых последовательность $(X_A(k+1, k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ вполне ограничена, т. е. матрица $X_A(k+1, k)$ обратима при каждом $k \in \mathbb{N}_0$, и найдется такое $a > 0$, что $\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \|X_A^{-1}(k+1, k)\| \leq a$.

Определение 1. Показателями Ляпунова системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ будем называть величины $\lambda_i(A) \doteq \inf_{F \in \mathcal{G}^i} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \ln \|X_A|_F(k, 0)\|$, $i = 1, \dots, n$, где $\mathcal{G}^i$ — множество i -мерных линейных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, $X_A|_F$ — сужение оператора Коши системы $A(\cdot)$ на подпространство $F \subset \mathbb{R}^n$. Полным спектром показателей Ляпунова системы $A(\cdot)$ назовем набор $\lambda(A) \doteq (\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A))$.

Заметим, что $\lambda_1(C) \leq \lambda_2(C) \leq \dots \leq \lambda_n(C)$ для любой системы $C(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$, поэтому полный спектр каждой такой системы принадлежит множеству $\mathbb{R}_{\leq}^n$ всех упорядоченных по неубыванию наборов n

чисел. Метрику во множестве $\mathbb{R}_{\leq}^n$ полагаем индуцированной нормой пространства $\mathbb{R}^n$. Итак, имеем отображение $C \mapsto \lambda(C)$, определенное на $\mathcal{M}_n^0$ и действующее в $\mathbb{R}_{\leq}^n$.

Определение 2. Полный спектр системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ называется *устойчивым*, если отображение $C \mapsto \lambda(C)$ непрерывно в точке $C \equiv A$. Полный спектр системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ называется *открытым*, если отображение $C \mapsto \lambda(C)$ открыто в точке $C \equiv A$.

Теорема 1. Если полный спектр системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ устойчив, то он открыт.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

О БЭРОВСКОМ КЛАССЕ СЛАБЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ КОРНЕЙ И ГИПЕРКОРНЕЙ

ПОХАЧЕВСКИЙ В.А.^{1,a}, БЫКОВ В.В.^{1,b}

¹Московский гос. университет им. М.В. Ломоносова, Россия

^apokhachevskiy@gmail.com, ^bvvbykov@gmail.com

Для заданного числа $t > 0$ обозначим через $\nu^{\varkappa}(y, t)$ в зависимости от значения $\varkappa$ количество у функции y на полуинтервале $[0, t)$: смен знака, если $\varkappa = -$; нулей, если $\varkappa = 0$; нулей с учетом кратности, если $\varkappa = +$; гиперкратных корней, если $\varkappa = *$. В последнем случае кратный нуль учитывается бесконечно много раз.

Определение 1. [1] Слабый верхний (нижний) показатель колеблемости знаков, нулей, корней или гиперкорней функции $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ задается равенством

$$\hat{\nu}_{\circ}^{\varkappa}[x] = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{a \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^{\varkappa}(\langle x, a \rangle, t) \quad (\check{\nu}_{\circ}^{\varkappa}[x] = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{a \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^{\varkappa}(\langle x, a \rangle, t)),$$

при $\varkappa = -, 0, +, *$ соответственно, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение, а звездочка в нижнем индексе обозначает выкалывание нуля.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

с непрерывными функциями A и компактно-открытой топологией.

Скажем [2, с. 223–224], что функция $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(\mathcal{M}, *)$ (или $(*, \mathcal{N})$), если для любого $r \in \mathbb{R}$ выполняется включение $f^{-1}((r, +\infty]) \in \mathcal{M}$ (соответственно, $f^{-1}([r, +\infty]) \in \mathcal{N}$). Ниже F_σ обозначает класс всех счетных объединений замкнутых множеств, а $F_{\sigma\delta}$ – класс счетных пересечений множеств из класса F_σ . Оператор Коши системы A будем обозначать через $X_A(\cdot, \cdot)$.

Теорема 1. *Для любого $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения:*

- 1) функционал $(A, \xi) \mapsto \check{\nu}_\circ^*[X_A(\cdot, 0)\xi]$, действующий из $\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}_*^n$ в $\overline{\mathbb{R}}$, принадлежит классу $(F_\sigma, *)$, а значит, второму классу Бэра;
- 2) функционал $(A, \xi) \mapsto \hat{\nu}_\circ^*[X_A(\cdot, 0)\xi]$, действующий из $\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}_*^n$ в $\overline{\mathbb{R}}$, принадлежит классу $(*, F_{\sigma\delta})$, а значит, третьему классу Бэра.

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}_\infty^n$ множество систем (1) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и метрикой

$$\rho(A, B) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \min \left\{ |A^{(k)}(t) - B^{(k)}(t)|, (t+1)^{-1} \right\}.$$

Теорема 2. *Для любого $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения:*

- 1) функционал $(A, \xi) \mapsto \check{\nu}_\circ^+[(X_A(\cdot, 0)\xi)]$, действующий из $\widetilde{\mathcal{M}}_\infty^n \times \mathbb{R}_*^n$ в $\overline{\mathbb{R}}$, принадлежит классу $(F_\sigma, *)$, а значит, второму классу Бэра;
- 2) функционал $(A, \xi) \mapsto \hat{\nu}_\circ^+[X_A(\cdot, 0)\xi]$, действующий из $\widetilde{\mathcal{M}}_\infty^n \times \mathbb{R}_*^n$ в $\overline{\mathbb{R}}$, принадлежит классу $(*, F_{\sigma\delta})$, а значит, третьему классу Бэра;
- 3) функционал $A \mapsto \sup_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \check{\nu}_\circ^+[x]$, действующий из $\widetilde{\mathcal{M}}_\infty^n$ в $\overline{\mathbb{R}}$, принадлежит классу $(F_\sigma, *)$, а значит, второму классу Бэра.

Работа второго автора поддержана Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-03-2024-074/5 по проекту «Исследование асимптотических характеристик колеблемости дифференциальных уравнений и систем, а также оптимизационных методов».

Список литературы

- [1] Сергеев И.Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы*. Изв. РАН. Сер. матем., 76:1 (2012), 149-172.
- [2] Хаусдорф Ф. *Теория множеств*. ОНТИ, М.–Л.: 1937.

О НЕСОВПАДЕНИИ ХАУСДОРФОВОЙ И ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТЕЙ РЕГУЛЯРНЫХ АТТРАКТОРОВ

ПОЧИНКА О.В.

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,
Россия
olga-pochinka@yandex.ru

Результаты получены совместно с С.В. Зеликом и А.А. Ягилевым. В настоящей работе для любого $r \geq 1$ построен C^r -гладкий поток в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, обладающий регулярным (в терминологии Бабина и Вишика) аттрактором, фрактальная размерность которого является нецелой и строго больше его хаусдорфовой размерности. Регулярный аттрактор построенного потока является объединением неустойчивых многообразий его состояний равновесия, которых конечное число и все они гиперболические. В построенных примерах пересечение устойчивых и неустойчивых многообразий состояний равновесия не трансверсально, то есть построенная система не является структурно устойчивой. Вопрос о существовании структурно устойчивого регулярного потока, у которого фрактальная размерность глобального аттрактора строго больше его хаусдорфовой размерности являлся открытым до сих пор. В рамках работы мы установили, что ответ на вопрос является отрицательным, доказав, что фрактальная размерность любого глобального регулярного аттрактора структурно устойчивого потока в $\mathbb{R}^3$ совпадает с его хаусдорфовой размерностью.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Список литературы

- [1] Babin A., Vishik M. *Regular attractors of semigroups and evolution equations*. J. Math. Pures Appl. 62:4 (1983), 441–491.
- [2] Douady, A., Oesterl. *Dimension de Hausdorff des attracteurs*. C. R. Acad. Sci. Paris. Seria A. 290 (1980), 1135–1138.
- [3] Зелик С.В. *Аттракторы. Тогда и сейчас*. УМН 78:4 (2023), 53–198.

ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

РОДИНА Л.И.

НИТУ «МИСиС», Россия

ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Россия

LRodina67@mail.ru

Приведем результаты [1], в которой получена теорема сравнения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

в предположении, что вектор-функция f непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяют условию Липшица по $x_1, \dots, x_n$. Вместе с системой (1) исследуем систему

$$\dot{x} = g(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

с такими же условиями для вектор-функции g . Система (2) называется *верхней системой сравнения* для (1), а система (1) называется *нижней системой сравнения* для (2) в области $P \subseteq \mathbb{R}^n$ при $t \geq t_0$, если для любых $t \geq t_0$, $x \leq y$, $x \in P$, $y \in P$, $i = 1, \dots, n$ имеет место

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \leq g_i(t, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n). \quad (3)$$

Множество $P \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *положительно инвариантным относительно системы* (1), если для любой начальной точки $x^0 \in P$ траектория ее решения $\varphi(t, t_0, x^0)$ содержится в P при всех $t \geq t_0$. Обозначим через $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ решения систем (1) и (2) соответственно, удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(t_0) = x^0$, $\psi(t_0) = x^0$. Неравенство $x \leq y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, будем понимать, как неравенства $x_i \leq y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 1. Пусть множество $P \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно систем (1), (2) и выполнено (3). Тогда для любых $x^0 \leq y^0$, $x^0 \in P$, $y^0 \in P$ неравенство $\varphi(t) \leq \psi(t)$ справедливо для всех $t \geq t_0$.

При помощи данной теоремы можно найти оценки характеристик сбора возобновляемого ресурса в случаях, когда неизвестны аналитические решения одной из систем. Рассмотрим популяцию, состоящую из отдельных видов $x_1, \dots, x_n$, либо разделенную на n возрастных групп, динамика которой при отсутствии эксплуатации задана системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, а в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса $u(k) \in [0, 1]^n$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть $X_i(k)$ — количество ресурса i -го вида до сбора в момент kd , $k = 1, 2, \dots$, $C_i \geq 0$ — агрегированная стоимость условной единицы i -го вида, $i = 1, \dots, n$, $x(0)$ — начальное количество ресурса. Одной из характеристик сбора ресурса является *средняя временная выгода* (см. [2], [3]) —

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j).$$

Результаты исследований проиллюстрированы на примерах моделей взаимодействия двух видов таких, как симбиоз и конкуренция.

Список литературы

- [1] Базулкина А.А., Родина Л.И. Теорема сравнения для систем дифференциальных уравнений и ее применение для оценки средней временной выгоды от сбора ресурса. Изв. ИМИ УдГУ, 63 (2024), 3-17.
- [2] Волдеаб М.С., Родина Л.И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду. Известия вузов. Математика, 1 (2022), 12-24.
- [3] Родина Л.И., Черникова А.В. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени. Труды ИММ УрО РАН, 29, 1 (2023), 167-179.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ В ВОСЬМИМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ С УПРАВЛЕНИЕМ ИЗ КРУГА

РОНЖИНА М.И.^{1,a}, МАНИТА Л.А.^{2,b}

¹РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина, Москва, Россия

²МИЭМ, Национальный исследовательский университет «Высшая
школа экономики», Москва, Россия

^aronzhina.m@gubkin.ru, ^blmanita@hse.ru

Задачи аффинные по ограниченному управлению могут иметь особые экстремали второго порядка. Аналогично случаю скалярного управления [1] в случае управления из круга важную роль в построении синтеза в окрестности особых экстремалей играет двумерный аналог задачи Фуллера

$$\int_0^\infty \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf_u, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad \|u\| \leq 1, \quad x, y, u \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь начало координат является единственной особой экстремалью и имеет второй порядок. Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина имеет размерность 8 и сводится к виду

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = -u, \quad u = z_1 / \|z_1\|. \quad (1)$$

Система (1) имеет решения в виде логарифмических спиралей:

$$z_m^*(t) = -A_{m-1}(T^* - t)^{5-m} e^{i\alpha \ln |T^* - t|}, \quad u^*(t) = e^{i\alpha \ln |T^* - t|}$$

(здесь $\alpha = \pm\sqrt{5}$ и $A_l \in \mathbb{C}$ известны), которые попадают в ноль за конечное время T^* , и оптимальное управление $u^*(t)$ совершает счетное число оборотов по границе круга [1].

Для задачи, аффинной по управлению из круга, гамильтонова система которой имеет большую размерность (≥ 32), доказано существование семейства экстремалей в виде логарифмических спиралей в окрестности особой экстремали второго порядка [2]. В случае, когда гамильтонова система имеет малую размерность, решения в виде логарифмических спиралей найдены только для некоторых конкретных задач оптимального управления [1, 3, 4].

В докладе представлена задача, аффинная по управлению из круга, гамильтонова система которой имеет размерность 8 и является малым возмущением системы (1) относительно действия группы

Фуллера $g_\lambda(z) = (\lambda^4 z_1, \lambda^3 z_2, \lambda^2 z_3, \lambda z_4)$. А именно, в окрестности особой экстремали порядка 2 гамильтонова система сводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + f_1(z, u), & \dot{z}_3 &= z_4 + f_3(z, u), \\ \dot{z}_2 &= z_3 + f_2(z, u), & \dot{z}_4 &= \beta(z)u + f_4(z, u), \quad u = z_1/\|z_1\|, \end{aligned} \quad (2)$$

где $f_i : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f_i(g_\lambda(z), u)\|/\lambda^{5-i} < C$, $\beta(z) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ и $\beta(0)$ — симметричная отрицательно определенная матрица.

Теорема 1 (см. [5]). *В достаточно малой окрестности нуля существует семейство решений системы (2) в виде логарифмических спиралей:*

$$z_m(t) = k_m(t) (T - t)^{5-m} e^{i\alpha \ln |T-t|} e^{i\varphi_m(t)}, \quad u(t) = e^{i\alpha \ln |T-t|} e^{i\varphi_0(t)},$$

и все их возможные повороты. Здесь $T > 0$, $\alpha = \pm\sqrt{5}$, функции $k_m(t)$, $\varphi_m(t)$ и $\varphi_0(t)$ ограничены.

Построенное семейство экстремалей попадает в нуль за конечное время T , при этом управление совершает счетное число оборотов по границе круга. Теорема 1 обобщает результат, полученный в [4].

Список литературы

- [1] Zelikin M.I., Borisov V.F. *Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics and engineering*. Birkhäuser, Boston: 1994.
- [2] Ронжина М.И., Манита Л.А., Локуциевский Л.В. *Окрестность особого режима второго порядка в задачах с управлением из круга*. Труды МИАН, 315 (2021), 222-236.
- [3] Ronzhina M. I., Manita L. A. *Spiral-Like Extremals near a Singular Surface in a Rocket Control Problem*. Regular and Chaotic Dynamics, 28:2 (2023), 148-161.
- [4] Ронжина М.И., Манита Л.А. *Структурная устойчивость логарифмических спиралей в задачах управления с особой экстремалью второго порядка*. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 35:1 (2025), 117-128.
- [5] Ронжина М.И., Манита Л.А. *Семейство логарифмических спиралей в гамильтоновых системах размерности 8 с управлением из круга*. Дифференциальные уравнения, 60:11 (2024), 1531-1540.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПО ОТЫСКАНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НАБЛЮДЕНИЯ

САБИТОВ К.Б.

Институт механики УФИЦ РАН, Стерлитамакский филиал Уфимского
университета науки и технологий,
sabitov_fmfm@mail.ru

Рассмотрим общее трехмерное уравнение эллиптического типа

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = K(z)(u_{xx} + u_{yy}) + N(x, y)u_{zz} + au_x + bu_y + \\ + cu_z + du = F(x, y, z) = f(x, y)g(z), \end{aligned} \quad (1)$$

в области $Q = D \times (0, \beta)$, $D = \{(x, y) \mid 0 < x < p, 0 < y < q\}$, где β , p , q – заданные положительные постоянные, $K(z) \geq 0$, $N(x, y) \geq 0$, $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$, $d(x, y, z)$ – заданные функции, и поставим следующие обратные задачи по отысканию пары функций (u, f) и (u, g) .

Задача 1. Найти функции $u(x, y, z)$ и $f(x, y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x, y, z) \in C(\overline{Q}) \cap C^2(Q), \quad u_x, u_y, u_z \in L_2(Q); \quad (2)$$

$$f(x, y) \in C(D) \cap L(D); \quad (3)$$

$$\mathcal{L}u(x, y, z) \equiv F(x, y, z), \quad (x, y, z) \in Q; \quad (4)$$

$$\begin{cases} u(0, y, z) = u(p, y, z) = 0, & 0 \leq y \leq q; \quad 0 \leq z \leq \beta, \\ u(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, & 0 \leq x \leq p; \quad 0 \leq z \leq \beta; \end{cases} \quad (5)$$

$$u(x, y, 0) = \tau(x, y), \quad u(x, y, \beta) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}; \quad (6)$$

$$\int_0^\beta u(x, y, z)g(z)dz = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \quad (7)$$

где $g(z)$, $\varphi(x, y)$, $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования данных

$$\tau(0, y) = \tau(p, y) = \varphi(0, y) = \varphi(p, y) = \psi(0, y) = \psi(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q;$$

$$\tau(x, 0) = \tau(x, q) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p; \quad (8)$$

$$\psi(x, 0) = \psi(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p.$$

Задача 2. Найти функции $u(x, y, z)$ и $g(z)$, удовлетворяющие условиям (2), (4) – (6) и

$$g(z) \in C(0, \beta) \cap L[0, \beta];$$

$$\iint_D u(x, y, z) f(x, y) dx dy = h(z), \quad 0 \leq z \leq \beta,$$

где $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\tau(x, y)$ и $h(z)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям (8) и

$$\iint_D \tau(x, y) f(x, y) dx dy = h(0), \quad \iint_D \varphi(x, y) f(x, y) dx dy = h(\beta).$$

В данном докладе, следуя работам [1], [2], методом интегральных тождеств установлены теоремы единственности решения обратных задач 1 и 2 для уравнения (1) по определению правой части. В случае, когда $K(z) \equiv 1$, $N \equiv 1$, $a = b = c \equiv 0$, $d = \text{const}$ решения задач построены в явном виде. Аналогичные задачи изучены в работе [3] для уравнения Гельмгольца от двух переменных x и y .

Работа выполнена на средства государственного бюджета по проекту № 123021200015-5 (FMRS-2023-0015).

Список литературы

- [1] Romanov V., Hasanov A. *Uniqueness and stability analysis of final data inverse source problems for evolution equations* // J. Inverse Ill-Posed Probl, 30 (2022). №3, 425 – 446.
- [2] Сабитов К.Б. *Обратные задачи для уравнений математической физики*. Наука, М: 2023.
- [3] Сабитов К.Б. *Обратные задачи для уравнения Гельмгольца по отысканию правой части с нелокальным интегральным наблюдением* // Журнал вычислительной математики и математической физики, 63 (2023). №7, 88 – 98.

СЛУЧАЙНЫЕ ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

САКБАЕВ В.Ж.

Институт прикладной математики им М.В. Келдыша РАН, Россия
fumi2003@mail.ru

Получены аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы для произведения независимых случайных линейных ограниченных операторов. Закон больших чисел устанавливает сходимость к нулю вероятности отклонения произведения случайных операторов от окрестности математического ожидания. Центральной предельная теорема устанавливает обобщенную слабую сходимость распределений произведения случайных операторов. В отличие от слабой сходимости мер, задаваемой пространством непрерывных ограниченных тестовых функций, пространство тестовых функций выбирается по свойствам задачи.

Эволюционные уравнения для неизвестной функции на координатном пространстве, в частности, уравнение полугруппы с квантовым гамильтонианом гармонического осциллятора в качестве генератора, получены как результат усреднения операторных случайных блужданий в симплектическом пространстве.

Эволюционные уравнения для квантовых состояний получены как результат усреднения случайных блужданий квантовых состояний под действием случайных унитарных каналов.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{A}$ – случайный самосопряженный оператор в пространстве H и $\mathbf{U}(t) = \exp(i\mathbf{A}t)$, $t \geq 0$, – соответствующая случайная полугруппа. Пусть $\mathcal{D}$ – плотное линейное многообразие в пространстве H и $\int_{\Omega} \|\mathbf{A}(\omega)u\|_H d\mu(\omega) < \infty \quad \forall u \in \mathcal{D}$. Пусть

$$\bar{\mathbf{A}}u = \int_{\Omega} \mathbf{A}(\omega)u d\mu(\omega), \quad u \in \mathcal{D}$$

– существенно самосопряженный оператор.

Если последовательность $\{\mathbf{U}_n\}$ IID случайных полугрупп с тем же распределением, то последовательность композиций

$$\{\mathbf{U}_n \circ \dots \circ \mathbf{U}_1\}$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|(\mathbf{U}_n^{\frac{1}{n}} \circ \dots \circ \mathbf{U}_1^{\frac{1}{n}} - M[\mathbf{U}_n^{\frac{1}{n}} \circ \dots \circ \mathbf{U}_1^{\frac{1}{n}}])x\|_H > \epsilon) = 0,$$

$$\forall \epsilon > 0 \forall T > 0, \forall x \in H.$$

Пусть $Q = \mathbb{R}^d$ и $H = L_2(\mathbb{R}^d)$. Пусть $B(H)$ -значный случайный процесс задан равенством

$$\xi(t) = \mathbf{S}(\eta t) \circ \mathbf{V}((1 - \eta)t), t \geq 0,$$

где η – случайная величина, принимающая значения $\{0, 1\}$ с вероятностью $w, 1 - w$ соответственно. Здесь $\mathbf{S}(t)u(x) = u(x - t^{1/2}h)$, $\mathbf{V}(t)u(x) = \exp(it^{1/2}(a, x))u(x)$, $t \geq 0$, $u \in H = L_2(\mathbb{R}^d)$, где h, a – пара независимых $\mathbb{R}^d$ -значных случайных величин с нулевым средними, ковариационными операторами D_X, D_P соответственно.

Определение 1. Последовательность мер $\{\mu_n\} : \mathbb{N} \rightarrow sa(B(H))$ сходится $B(H)$ -сильно к мере $\mu \in sa(B(H))$ если последовательность операторов $\{\Psi_{\mu_n}\}$ сходится в $B(H)$ к оператору Ψ_μ в сильной операторной топологии, где

$$\Psi_\mu u(x) = \int_{B(H)} u(\mathbf{A}x) d\mu(\mathbf{A}), u \in X, x \in E.$$

Теорема 2. Пусть $\{\xi_n(t)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных оператор-функций, распределение каждой из которых совпадает с распределением случайной оператор-функции ξ . Тогда для любых $T > 0$, $u \in H$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[0, T]} \|M\xi_n(\frac{t}{n}) \dots \xi_1(\frac{t}{n})u - \mathbf{U}(t)u\|_H = 0,$$

где $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$, – полу группа, разрешающая задачу Коши

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U}(t) = \left(\frac{w}{2} \operatorname{div}(D_X \nabla) - \frac{1-w}{2} (D_P x, x) \right) \mathbf{U}(t), t > 0; \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{I}.$$

РАЗРЕШИМОСТЬ И АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МГД-ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

САМОХИН В.Н.

Московский политехнический университет, Россия
avt428212@yandex.ru

Рассматривается система уравнений типа Прандтля для электропроводной жидкости с реологическим законом, предложенным О.А. Ладыженской [1]. В случае двумерного стационарного течения эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \nu \left(1 + 3d \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + B^2(U - u) = -U \frac{dU}{dx}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ν — кинематическая вязкость среды и d — малая положительная постоянная, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ и проводимость среды σ предполагаются равными единице, $B(x)$, $U(x)$ — заданные функции. Скорость внешнего потока $U(x)$ связана с давлением $p(x)$, компонентами электрического $E(x)$ и магнитного $B(x)$ полей соотношением

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} - EB - B^2U.$$

Система уравнений (1) рассматривается в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, u(x, 0) = 0, v(x, 0) = v_0(x), u(x, y) \rightarrow U(x) \text{ при } y \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где $U(0) = 0$, $U(x) > 0$ при $x > 0$. Пусть $U_x(x)$ измерима и ограничена, $U_x(0) > 0$, функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ предполагаются заданными, $B_x(x)$ ограничена при $0 \leq x \leq X$, $B(0) = B_0 = \text{const}$. С помощью замены переменных Крокко, см. [2], система (1) сводится к одному квазилинейному уравнению. При определенных условиях краевая задача для этого уравнения однозначно разрешима и решение ее имеет свойства, позволяющие обратить преобразование Крокко и получить

однозначную разрешимость задачи (1)-(2). Из оценок решения задачи в переменных Крокко следуют также оценки и асимптотики исходной задачи.

Теорема 1. *Предположим, что*

$$U(x) = x(a + xa_1(x)), \quad v_0(x) = b + xb_1(x), \quad 0 \leq x \leq X,$$

где $a = \text{const} > 0$, $b = \text{const}$; $U > 0$ при $x > 0$; $a_1, a_{1x}, a_{1xx}, b_1, b_{1x}$ ограничены, B непрерывно дифференцируема. Тогда задача (1)-(2) в области D , при X , зависящем от U, v_0 имеет решение u, v , которое обладает следующими свойствами: $u_y > 0$ при $y \geq 0$ и $x > 0$; $\frac{u}{U}, \frac{u_y}{U}$ ограничены и непрерывны в $\bar{D}$; $u > 0$ при $y > 0$ и $x > 0$; $u \rightarrow U$ при $y \rightarrow \infty$, $u(x, 0) = u(0, y) = 0$; $\frac{u_y}{U} > 0$ при $y \geq 0$; $\frac{u_y}{U} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$; u_x, u_y, u_{yy} ограничены и непрерывны в $\bar{D}$; v непрерывна в $\bar{D}$ по y при $x > 0$; v непрерывна по x и y внутри D ; u_{yyy} ограничена в $\bar{D}$; u_{xy} ограничена в D при ограниченных y ; u_{xy} и u_{yuy} непрерывны в $\bar{D}$; $\frac{u_{yy}}{u_y}$ непрерывна в D по y ; имеют место оценки

$$e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{2C_2x}\right]} \leq 1 - \frac{u}{U} \leq e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{-2C_1x}\right]}.$$

Список литературы

- [1] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Наука, М: 1961.
- [2] Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997.- 512 с.
- [3] Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Об аттракторах МГД-пограничного слоя жидкости с реологическим законом Ладыженской. Влияние магнитного поля на асимптотику скорости // Зап. научн. сем. ПОМИ РАН, Том 536, 2024. С.286–335.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА В НАТУРАЛЬНЫХ ТОЧКАХ

САФОНОВА Т.А.

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова,
Россия
t.Safonova@narfu.ru

В работах докладчика в соавторстве с К.А. Мирзоевым был предложен метод, основанный на применении спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, позволяющий вычислять суммы некоторых сходящихся рядов в терминах определенных интегралов от элементарных функций. В частности, этот метод позволяет установить, что при $-1 < a < 1$ справедливы тождества

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2 - a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} - \frac{1}{a^2 \sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} (\sin a\pi - \sin 2ax) \operatorname{tg} x dx, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2 \cos \frac{a\pi}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos ax - \cos \frac{a\pi}{2}}{\cos x} dx, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} k}{k^2 - a^2} = \frac{1}{a \sin a\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin ax}{\sin x} \right)^2 dx, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{1}{2a \cos \frac{a\pi}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin ax}{\sin x} dx. \quad (4)$$

Из них, в частности, можно извлечь справедливость подобных интегральных представлений для дигамма-функции Эйлера $\psi(a)$ и родственной с ней функции $G(a) = 1/2(\psi((1+a)/2) - \psi(a/2))$.

Определим дзета-функцию Римана $\zeta(s)$ и родственные с ней функции Дирихле $\lambda(s)$, $\eta(s)$ и $\beta(s)$ равенствами

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}, \quad \lambda(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s}, \quad \Re s > 1$$

$$\eta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}, \quad \beta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s}, \quad \Re s > 0.$$

Левые части равенств (1) - (4), очевидно, являются производящими функциями для для числовых последовательностей $\zeta(2n+1)$, $\lambda(2n+1)$, $\eta(2n-1)$ и $\beta(2n)$ при $n = 1, 2, \dots$, соответственно.

В докладе речь пойдет о следствиях равенств (1) - (4), а именно, об их применении к различным представлениям значений функций $\zeta(s)$, $\lambda(s)$, $\eta(s)$ и $\beta(s)$ в натуральных точках. При этом особое внимание будет уделено постоянным Каталана $\beta(2)$ и Апери $\zeta(3)$.

Разлагая в ряды Тейлора по степеням a интегралы, стоящие в правых частях (1) - (4), и сравнивая эти разложения с соответствующими разложениями их левых частей, получаем интегральные представления для чисел $\zeta(2n+1)$, $\lambda(2n+1)$, $\eta(2n-1)$, $\beta(2n)$ и их некоторых комбинаций. Из них следуют представления для этих чисел в виде довольно быстро сходящихся числовых рядов, общий член которых содержит $\zeta(2n)$, и рядов с общим членом, содержащим логарифмы. Кроме того, используя интегральные представления для $\psi(a)$ и $G(a)$ и поступая аналогично, можно получить известные и некоторые новые тождества для определенных линейных комбинаций значений функций $\zeta(s)$, $\lambda(s)$, $\eta(s)$ и $\beta(s)$ в натуральных точках.

Отметим также, что если a является рациональным числом, то интегралы из правых частей (1) - (4) явно вычисляются в терминах элементарных функций. Эти вычисления позволяют получить, например, новые предельные соотношения для постоянных Каталана и Апери.

Работа поддержана РНФ, грант 24-21-00128.

СТАБИЛЬНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ И ИХ МЕРЫ

СЕРГЕЕВ И.Н.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия
igniserg@gmail.com

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$) с мерой Лебега mes рассмотрим дифференциальную (нелинейную, вообще говоря) систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

где $f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G)$. Пусть $\mathbb{B}_\delta \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| \leq \delta\}$, а $x_f(\cdot, x_0)$ — решение системы (1) с начальным значением $x_f(0, x_0) = x_0$.

Определение 1. Скажем, что система (1) обладает *ляпуновской, перроновской, верхнепредельной*, при ассоциированных $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ и $K = \Lambda, \Pi, \Sigma$, *устойчивостью* или *полной неустойчивостью*, если

$$\varkappa(f) \equiv \overline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} K(f, x_0) = 0, \quad \bar{\varkappa}(f) \equiv \underline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} K(f, x_0) > 0,$$

где $\Lambda(f, x_0) \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x_f(t, x_0)|$, $\Pi(f, x_0) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_f(t, x_0)|$ и $\Sigma(f, x_0) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x_f(t, x_0)|$ (причем если решение $x_f(\cdot, x_0)$ определено не на всем луче $\mathbb{R}_+$, то полагаем $K(f, x_0) = 1$), или обладает *асимптотической устойчивостью*, если

$$\varkappa_0(f) \equiv \overline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} K_0(f, x_0) = 0, \quad K_0 \equiv \text{sgn } K, \quad K = \Pi, \Sigma, \quad \Lambda_0 \equiv \Lambda + \Sigma_0.$$

Определение 2. Для системы (1), при ассоциированных $\varkappa$ и K из определения 1, назовем *мерой ляпуновской, перроновской, верхнепредельной устойчивости* или *неустойчивости* величину

$$\mu_\varkappa(f) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \underline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)}{\text{mes } \mathbb{B}_\delta}, \quad \mu_{\bar{\varkappa}}(f) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \underline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, \delta)}{\text{mes } \mathbb{B}_\delta}$$

и мерой *асимптотической устойчивости* величину

$$\mu_{\lambda_0}(f) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \underline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes}(M_\sigma(f, 0, \delta) \cap M_\lambda(f, \varepsilon, \delta))}{\text{mes } \mathbb{B}_\delta},$$

$$\mu_{\varkappa_0}(f) \equiv \underline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_\varkappa(f, 0, \delta)}{\text{mes } \mathbb{B}_\delta}, \quad \varkappa = \pi, \sigma,$$

где $M_{\varkappa}(f, \varepsilon, \delta)$ или $M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, \delta)$ — множества всех значений $x_0 \in \mathbb{B}_\delta$, для которых $K(f, x_0) \leq \varepsilon$ или $K(f, x_0) > \varepsilon$ (при $\varepsilon \geq 0$).

Теорема 1. Для любой системы (1) каждое стабильностное свойство влечет за собой равенство единице меры этого свойства.

Теорема 2. При каждом $n > 1$ существуют две автономные системы вида (1): одна имеет единичные меры асимптотической устойчивости всех типов, но не обладает устойчивостью никакого типа, а другая имеет единичные меры неустойчивости всех типов, но не обладает полной неустойчивостью никакого типа.

Теорема 3. Для любой системы (1) выполнены неравенства

$$0 \leq \mu_\lambda(f) \leq \mu_\sigma(f) \leq \mu_\pi(f) \leq 1, \quad 1 \geq \mu_{\bar{\lambda}}(f) \geq \mu_{\bar{\sigma}}(f) \geq \mu_{\bar{\pi}}(f) \geq 0, \quad (2)$$

$$0 \leq \mu_{\lambda_0}(f) \leq \mu_{\sigma_0}(f) \leq \mu_{\pi_0}(f) \leq 1, \quad \mu_{\varkappa_0}(f) \leq \mu_{\varkappa}(f), \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma, \quad (3)$$

$$0 \leq \mu_{\varkappa}(f) + \mu_{\bar{\varkappa}}(f) \leq 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

Теорема 4. При каждом $n > 1$ для любого отдельного неравенства в цепочках (2) и (3) существуют такие две автономные системы вида (1), что для одной системы это неравенство является строгим, а для другой оно обращается в равенство.

Теорема 5. При каждом $n > 1$ для любых чисел $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$, удовлетворяющих условиям $\alpha \leq \beta = 1 - \gamma$, существует автономная система (1), удовлетворяющая равенствам

$$\mu_{\varkappa_0}(f) = \alpha, \quad \mu_{\varkappa}(f) = \beta, \quad \mu_{\bar{\varkappa}}(f) = \gamma, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

Теорема 6. При каждом $n > 1$ для каждой из следующих четырех цепочек соотношений

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f) = 0, \quad \mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = 0 < 1 = \mu_\pi(f),$$

$$\mu_\lambda(f) = 0 < 1 = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f), \quad \mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f) = 1$$

существует автономная система (1), удовлетворяющая ей, а также равенствам $\mu_{\varkappa}(f) + \mu_{\bar{\varkappa}}(f) = 1$ и $\mu_{\varkappa_0}(f) = \mu_{\varkappa}(f)$ при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

СИДОРОВ С.Н.

Уфимский государственный нефтяной технический университет
stsid@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$Lu = F(x, t), \quad (1)$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x, t) | 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\},$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - t^n u_t - bu, & t > 0, \\ u_{xx} - (-t)^m u_{tt} - bu, & t < 0, \end{cases}$$

$$F(x, t) = \begin{cases} F_1(x, t), & t > 0, \\ F_2(x, t), & t < 0, \end{cases}$$

где $n > 0$, $m > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и b – заданные действительные числа, $F_i(x, t)$, $i = 1, 2$, – известные функции и следующие начально-граничные задачи.

Задача 1. Пусть $0 < n < 1$, $0 < m < 1$. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} t^n u_t(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0-0} u_t(x, t); \quad (3)$$

$$Lu(x, t) \equiv F(x, t), \quad (x, t) \in D_+ \cup D_-; \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (5)$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. Пусть $0 < n < 1$, $1 < m < 2$. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям (2), (4) – (6) и

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} t^n u_t(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0-0} (-t)^{m-1} u_t(x, t), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (7)$$

Задача 3. Пусть $0 < n < 1$, $m = 1$. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям (2), (4) – (6) и

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} t^n u_t(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0-0} \frac{u_t(x, t)}{\ln(-t)}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8)$$

Для уравнения (1) линия $t = 0$, как в работе М.В. Келдыша [1], является характеристикой степенного вырождения уравнения, что затрудняет постановку краевых задач.

Начально-граничная задача для уравнения (1), когда $n = 0$ и $m < 0$, $n < 0$ и $m = 0$, $n < 0$ и $m < 0$ изучена в работе [2].

В работе получен критерий единственности решения задач 1 – 3 при различных $0 < n < 1$ и $0 < m < 2$. Их решения построены в явной форме в виде сумм рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Для этих рядов возникает проблема малых знаменателей, которая затрудняет обоснование сходимости. Для доказательства равномерной сходимости построенных рядов найдены оценки, гарантирующие отделенность от нуля малых знаменателей, которые позволили доказать существование регулярного решения задач 1 – 3, т.е. решения, удовлетворяющего условиям (2) и (3), (2) и (7), (2) и (8) соответственно. Когда $n \geq 1$ или $m \geq 2$ поставленные задачи для уравнения (1) становятся некорректными.

Список литературы

- [1] Келдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа*. Докл. АН СССР, 77 (2) (1951), 181–183.
- [2] Sabitov K.B., Sidorov S.N. *Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type*. Journal of Mathematical Sciences, 236 (6) (2019), 603–640.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПОЗИЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ БУШМАНА-ЭРДЕЙИ

СИТНИК С. М.^{1,a}, ДУХНОВСКИЙ С. А.^{2,b}

¹НИУ БелГУ, Россия

²НИУ МГСУ, Россия

^amathsms@yandex.ru, ^bsergeidukhnvskijj@rambler.ru

Теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики, находящимся на стыке дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегро-дифференцирования, теории обратных задач и задач рассеяния. Значительный вклад в эту теорию и ее приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова [1].

В докладе будет рассказан композиционный метод построения операторов преобразования [2, 3, 4]. Этим методом получаются по единой схеме все известные ранее в явном виде операторы преобразования, а также получены многочисленные новые классы операторов преобразования обобщенных операторов Бушмана-Эрдейи.

Список литературы

- [1] Катрахов В. В., Ситник С. М. *Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений*. Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64, № 2. С. 211–426.
- [2] Ситник С. М. *Операторы преобразования и их приложения*. В сб.: Исследования по современному анализу и математическому моделированию 2008. Владикавказ, С. 226–293.
- [3] Sitnik S. M., Jebabli I. *On Applications of Integral Transforms Composition Method*. Lobachevskii Journal of Mathematics. 44:3 (2023), 1029–1042.
- [4] Ситник С. М., Шишкина Э. Л. *Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя*. М.: Физматлит, 2019.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА И МОДЕЛЬ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ХОПФИЛДА

СКВОРЦОВА М.А.

Новосибирский государственный университет, Россия
sm-18-nsu@yandex.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений нейтрального типа

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) = & -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) \\ & + \sum_{j=1}^n e_{ij} \dot{x}_j(t - \xi_{ij}(t)) + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0,\end{aligned}$$

где $\tau_{ij}(t), \xi_{ij}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $f_j(x), g_j(x) \in C(\mathbb{R})$, и выполнены следующие условия:

$$0 \leq \xi_{ij}(t) \leq \xi, \quad 0 \leq \tau_{ij}(t) \leq \tau, \quad \dot{\xi}_{ij}(t) \leq \bar{\xi}, \quad \dot{\tau}_{ij}(t) \leq \bar{\tau},$$

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq l_j |x - y|, \quad |g_j(x) - g_j(y)| \leq m_j |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Эта система рассматривалась в работе [1] как модель нейронной сети Хопфилда. Авторы данной работы изучали экспоненциальную устойчивость стационарных решений системы, используя квазилинейный функционал Ляпунова – Красовского. Были указаны достаточные условия на коэффициенты системы, параметры запаздывания и нелинейные функции, при которых стационарное решение будет экспоненциально устойчивым. Вместе с тем, вопрос о получении конструктивных оценок решений, характеризующих скорость стабилизации на бесконечности, также представляет значительный интерес.

Отметим, что в настоящее время имеются результаты о получении конструктивных оценок решений для широких классов дифференциальных уравнений нейтрального типа (см., например, [2]-[6]). В указанных работах были предложены различные квадратичные функционалы Ляпунова – Красовского, позволяющие получать оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности.

В настоящей работе мы получим оценки решений для модели нейронной сети Хопфилда, используя функционалы Ляпунова – Красовского, предложенные в [2]-[6].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00367, <https://rscf.ru/project/24-21-00367/>.

Список литературы

- [1] Wan L., Zhou Q., Fu H., Zhang Q. *Exponential stability of Hopfield neural networks of neutral type with multiple time-varying delays* // AIMS Mathematics. 2021. V. 6, No. 8. P. 8030-8043.
- [2] Demidenko G.V. *Stability of solutions to linear differential equations of neutral type* // Journal of Analysis and Applications. 2009. V. 7, No. 3. P. 119-130.
- [3] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. *Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами* // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059-1077.
- [4] Матвеева И.И. *Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа* // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 2. С. 344-352.
- [5] Матвеева И.И. *Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием* // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, № 3. С. 579-594.
- [6] Demidenko G.V., Matveeva I.I. *The second Lyapunov method for time-delay systems* // Functional Differential Equations and Applications (Editors: Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S.). Series: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer Nature, Singapore, 2021. V. 379. P. 145-167.

УСРЕДНЕНИЕ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

СЛОУЩ В.А.^{1,a}, ФАДДЕЕВА Н.М.^{1,b}

¹Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

^av.slouzh@spbu.ru, ^bfaddeevanina@gmail.com

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ рассматривается оператор Дирака с сингулярным магнитным потенциалом, электрическим потенциалом

и переменной массой:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\varepsilon := & \left(D_1 - \frac{1}{\varepsilon} A_1^\varepsilon(\mathbf{x}) \right) \sigma_1 + \left(D_2 - \frac{1}{\varepsilon} A_2^\varepsilon(\mathbf{x}) \right) \sigma_2 \\ & + m^\varepsilon(\mathbf{x}) \sigma_3 + V^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{1}, \quad \text{Dom } \mathcal{D}_\varepsilon = H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2), \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Здесь используются обозначения: $f^\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что коэффициенты $A_1, A_2, m, V \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $p > 2$, и $\mathbb{Z}^2$ -периодичны; кроме того предполагается, что вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x}))^t$ удовлетворяет условиям калибровки

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_{(0,1)^d} \mathbf{A}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \nabla \varphi(\mathbf{x}) = (A_2(\mathbf{x}), -A_1(\mathbf{x}))^t, \\ \int_{(0,1)^d} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Задача (1) имеет единственное $\mathbb{Z}^2$ -периодическое решение $\varphi(\mathbf{x})$. В терминах $\varphi(\mathbf{x})$ опишем усреднение оператора $\mathcal{D}_\varepsilon$. Положим

$$\begin{aligned} \omega_\pm(\mathbf{x}) &:= e^{\pm\varphi(\mathbf{x})}, \quad \widehat{\omega}_\pm(\mathbf{x}) := \omega_\pm(\mathbf{x}) \|\omega_\pm\|_{L_2((0,1)^d)}^{-1}, \\ \widehat{\Omega}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \widehat{\omega}_-(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \widehat{\omega}_+(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\|(\mathcal{D}_\varepsilon - iI)^{-1} - \widehat{\Omega}^\varepsilon(\mathcal{D}^0 - iI)^{-1}\widehat{\Omega}^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)} \leq C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Здесь $C > 0$ зависит только от коэффициентов A_1, A_2, m, V ;

$$\mathcal{D}^0 := \gamma (D_1 \sigma_1 + D_2 \sigma_2) + V^0;$$

$$V^0 = \int_{(0,1)^d} \widehat{\Omega}(\mathbf{x})(m(\mathbf{x})\sigma_3 + V(\mathbf{x})\mathbf{1})\widehat{\Omega}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$\gamma = \int_{(0,1)^d} \widehat{\omega}_+(\mathbf{x}) \widehat{\omega}_-(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Для случая постоянной массы $m(\mathbf{x}) = m_0$ и нулевого электрического потенциала $V(\mathbf{x}) = 0$ данный результат был получен в работе А.А.Кукушкина (2013).

Исследование поддержано РНФ (грант № 22-11-00092-П).

МНОГОТОЧЕЧНАЯ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОСКОЛКОВА

СУКАЧЕВА Т.Г.^{1,a}, ЗАГРЕБИНА С.А.^{2,b}

¹Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, Россия

²Южно-Уральский государственный университет, Россия

^atamara.sukacheva@novsu.ru, ^bzagrebinasa@susu.ru

Рассмотрим систему уравнений

$$(1 - \varkappa \nabla^2) v_t = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v - \nabla p + f, \quad \nabla \cdot v = 0, \quad (1)$$

моделирующую динамику скорости $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $v_k = v_k(x, t)$, $k = \overline{1, n}$ и давления $p = p(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, вязко-упругой несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , параметры $\varkappa \in \mathbb{R}$ и $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругие и вязкие свойства жидкости соответственно. Систему (1) впервые получил и исследовал А.П. Осколков [1]. Поэтому ее стали называть *системой Осколкова*.

А.П.Осколков и его ученики исследовали однозначную разрешимость различных начально-краевых задач для системы (1) и разнообразных ее обобщений при *положительных значениях* параметра $\varkappa$ в ограниченных и неограниченных областях пространства $\mathbb{R}^n$,

$n \in \{2, 3, 4\}$. Соответствующие уравнения редуцируются к абстрактной модели $L\dot{u} = Mu + N(u)$, где L, M – линейные операторы, а N – нелинейный оператор в специальном образом построенных пространствах.

Рассмотрим линейную абстрактную модель $L\dot{u} = Mu + f$, в банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, причем операторы $L \in \mathbb{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейен и непрерывен), $M \in \mathbb{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейен, замкнут и плотно определен). Пусть оператор M (L, p) -ограничен [2], причем его L -спектр удовлетворяет условию, при котором существуют относительно спектральные проекторы $P_j, j = \overline{0, m}$.

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} R_{\mu}^L(M) d\mu \in \mathbb{L}(\mathfrak{U}); \quad Q_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} L_{\mu}^L(M) d\mu \in \mathbb{L}(\mathfrak{F}).$$

См. подробности в [3].

Рассмотрим стохастическое линейное уравнение $L \overset{\circ}{\eta} = M\eta + N\omega$, где $\eta = \eta(t)$ – искомый, а $\omega = \omega(t)$ – заданный стохастический $\mathbf{K}$ -процесс, с многоточечным начально-конечным условием

$$\lim_{t \rightarrow 0+} P_0(\eta(t) - \xi_0) = 0, \quad P_j(\eta(\tau_j) - \xi_j) = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

При исследовании разрешимости абстрактной стохастической задачи предполагается, что оператор M является (L, p) -ограниченным, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполняется условие, гарантирующее существование относительно спектральных проекторов $P_j, j = \overline{0, m}$. Причем под производной понимается производная Нельсона – Гликлиха. Случайные процессы, имеющие производные Нельсона – Гликлиха, мы называем дифференцируемыми «шумами». Полученные абстрактные результаты прилагаются к стохастической линейной системе Осколкова. Доказана теорема существования единственного решения многоточечной начально-конечной задачи для этой системы [3].

Публикация подготовлена в рамках проекта *Математическое моделирование природных процессов* (государственное задание в сфере научной деятельности), исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20037 (<https://rscf.ru/project/24-11-20037>) и Челябинской области.

Список литературы

- [1] Осколков А.П. *О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости.* Записки науч. сем. ЛОМИ, 27 (1972), 145-160.
- [2] Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов.* Успехи матем. наук, 49:4, (1994), 45-74.
- [3] Sukacheva T. G., Zagrebina S.A. *Analysis of the stochastic Oskolkov system with a multipoint initial-final value condition.* GSA (Global and Stochastic Analysis), 11:4 (2024), 166-177.

ЗАДАЧА АВАЛОС-ТРИДЖИАНИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ ОСКОЛКОВА НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА И СИСТЕМЫ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

СУКАЧЕВА Т.Г.^{1,a}, КОНДЮКОВ А.О.^{1,b}

¹Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, Россия

^atamara.sukacheva@novsu.ru, ^ba.kondukov@novsu.ru

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} & (1 - \lambda \nabla^2)u_t - \eta \nabla^2 u - (\tilde{u} \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)\tilde{u} - \\ & - \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 \mathbf{w}_l + \nabla p = 0, \quad \forall (t, x) \in (0, T] \times \Omega_f \equiv \Omega_{Tf}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}_l}{\partial t} = u + \alpha_l \mathbf{w}_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad \beta_l \in \mathbb{R}_+, \quad l = \overline{1, K}, \quad \forall (t, x) \in \Omega_{Tf}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \forall (t, x) \in \Omega_{Tf}, \quad (3)$$

$$w_{tt} - \nabla^2 w + w = 0, \quad \forall (t, x) \in (0, T] \times \Omega_s \equiv \Omega_{Ts} \quad (4)$$

с граничными условиями

$$u|_{\Gamma_f} \equiv 0, \quad \forall (t, x) \in (0, T] \times \Gamma_f \equiv \Gamma_{Tf}, \quad (5)$$

$$\mathbf{w}_l|_{\Gamma_f} \equiv 0, \quad \forall (t, x) \in \Gamma_{Tf}, \quad (6)$$

$$u \equiv w_t, \quad \forall (t, x) \in (0, T] \times \Gamma_s \equiv \Gamma_{Ts}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} = p\nu, \quad \forall (t, x) \in \Gamma_{Ts} \quad (8)$$

и начальными условиями

$$\begin{aligned} (w(0, \cdot), w_t(0, \cdot), \mathbf{w}_1(0, \cdot), \dots, \mathbf{w}_K(0, \cdot), u(0, \cdot)) = \\ = (w_0, w_1, \mathbf{w}_{10}, \dots, \mathbf{w}_{K0}, u_0) \in \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Вектор $u = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор скорости жидкости, вектор $w = \text{col}(w_1, w_2, \dots, w_n)$ – вектор смещения тела, которое занимает область Ω_s , и погружено в жидкость, занимающую область Ω_f . Тогда $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f$, $\overline{\Omega_s} \cap \overline{\Omega_f} = \partial\Omega_s \equiv \Gamma_s$ является общей границей Ω_s , и Ω_f . Γ_f внешняя граница области Ω_f . Скалярная функция p – давление, параметры $\eta \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно. Параметры $\beta_l \in \mathbb{R}_+$, $l = \overline{1, K}$, определяют время ретардации (запаздывания) давления. Подробности см. в [1]

Задача Авалос-Триджиани (задача АТ) (1)-(9) моделирует случай, когда жидкость в Ω_f является несжимаемой вязкоупругой жидкостью Кельвина - Фойгта, описываемой линеаризованной системой Осколкова ненулевого порядка [2]. В случае $K = 0, \lambda = 0$ задача АТ для линейной модели изучалась в [3]. При $K = 0$ задача АТ для линеаризованной системы Осколкова и системы волновых уравнений рассматривалась в [4]. Теорема существования единственного решения задачи АТ (1)-(9) обобщает результаты [4].

Публикация подготовлена в рамках проекта *Математическое моделирование природных процессов* (государственное задание в сфере научной деятельности).

Список литературы

- [1] Sukacheva T. G., Kondyukov A.O. *Linearized Oskolkov system of non-zero order in the Avalos-Triggiani problem*. Journal of Computational and Engineering Mathematics, 12:1 (2025), 36-43.
- [2] Осколков А.П. *Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и Олдройта*. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 179 (1988), 126-164.
- [3] Avalos G., Lasiecka I., Triggiani R. *Higher regularity of a coupled parabolic-hyperbolic fluid-structure interactive system*. Georgian Mathematical Journal, 15:3 (2008), 403-437.

- [4] Sukacheva T. G., Kondyukov A.O. *The linearized Oskolkov system in the Avalos-Triggiani problem*. Journal of Computational and Engineering Mathematics, 11:1 (2024), 17-23.

D И E-СИНГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННО ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

СУЛЕЙМАНОВ Б.И.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия
bisul@mail.ru

Начиная с работы А. Х. Рахимова [1], в последние десятилетия сложилось уже целое направление исследований, посвященных описанию сингулярностей решений квазилинейных уравнений в частных производных, являющихся типичными в смысле математической теории катастроф особенностями проектирования из области изменения независимых переменных, которые являются гладкими функциями зависимых переменных.

В недавней статье [2] было замечено, что генотипы сингулярностей гладких отображений, определяющих все три типичные в смысле математической теории катастроф особенности решений системы уравнений одномерного изоэнтропического газа, совпадают с генотипами соответствующих подобных особенностям решений линейного волнового уравнения с постоянными коэффициентами (с ростками в нуле функций $A_2^\pm : \pm x^3$, $A_3^\pm : \pm x^4$ и $D_4^+ : x^2y + y^3$. В этой работе была выдвинута гипотеза о том, что аналогичное наследование имеет место и в пространственно не одномерных случаях.

В данном докладе сообщается о том, что в числе типичных особенностей пространственно двумерного волнового уравнения

$$U''_{TT} = U''_{XX} + U''_{YY}$$

имеются особенности с генотипами соответствующие росткам в нуле функций $D_4^\pm : x^2y \pm y^3$, а также функций $D_5^\pm : x^2y \pm y^4$ и, что, особенно примечательно, функций с сингулярностями типа $E : x^3 + (O(x^2 + y^2))^2$ (это будут скорее всего ростки функций $E_6 : x^3 + y^4$ или $E_7 : x^3 + xy^3$).

Для анализа таких сингулярностей рассматривались гладкие решения $\omega(\tau, \xi, \eta)$ образа волнового уравнения при преобразования Лежандра

$$U - \tau T - \xi X - \eta Y + \omega = 0$$

в окрестностях их неморсовских критических точек с двумя «плохими» направлениями.

Вывод о типичности выше упомянутых сингулярностей волнового уравнения следует из возможности — в соответствии с идеологией математической теории катастроф — наложения до трех (числа независимых переменных) дополнительных ограничений на коэффициенты разложений Тейлора гладких решений $\omega(\tau, \xi, \eta)$ уравнения, являющегося образом волнового уравнения при преобразовании Лежандра.

Список литературы

- [1] Рахимов, А.Х. . *Особенности римановых инвариантов*. Функц. анализ и его прил., 27:1 (1993), 46–59.
- [2] Сулейманов, Б. И., Шавлуков, А. М. *О наследовании решениями уравнений движения изэнтропического газа типичных особенностей решений линейного волнового уравнения* Мат. заметки, 112:4 (2022), 625–640.

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС В СИСТЕМАХ С ЗАТУХАЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

СУЛТАНОВ О.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Россия
Лаборатория им. П.Л. Чебышева, СПбГУ, Россия
oasultanov@gmail.com

Рассматриваются возмущения нелинейных колебательных систем на плоскости. Предполагается, что интенсивность возмущений стремится к нулю со временем, а частота является асимптотически постоянной с предельным значением, удовлетворяющим некоторому резонансному условию. Исследуются асимптотические режимы для решений возмущенных уравнений. В частности, обсуждается появление притягивающих решений с асимптотически постоянной резонансной амплитудой. Такие эффекты в близких задачах с малым параметром обычно связывают с явлением нелинейного резонанса.

С помощью комбинации техники усреднения и метода функций Ляпунова, выводятся модельные уравнения, решения которых описывают возмущенную динамику. Показано, что резонансные решения имеют место в режиме фазовой синхронизации. Найдены условия существования и устойчивости таких решений, а также описаны соответствующие пороговые значения.

Доклад основан на работах [1, 2].

Список литературы

- [1] Sultanov O.A. *Resonance in isochronous systems with decaying oscillatory perturbations*. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 23 (2024), 295, 29 pp.
- [2] Sultanov O.A. *Nonlinear resonance in oscillatory systems with decaying perturbations*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 45:5 (2025), 1691-1719.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

СУРНАЧЕВ М.Д.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Миусская пл. 4, Москва, 125047, Россия
peitsche@yandex.ru

Доклад основан на совместной работе с Анной Балджы (Билефельд, ФРГ) и Сварненду Силем (Бангалор, Индия) и посвящен краевым задачам для лапласиана Ходжа и систем типа div-rot в пространствах Лебега и Соболева с переменным показателем. Пусть M риманово многообразие с краем bM , а переменный показатель $p(\cdot) : M \rightarrow [p_-, p_+]$, $1 < p_- < p_+ < +\infty$ удовлетворяет логарифмическому условию В.В. Жикова:

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{L}{\log(e + \text{dist}(x, y)^{-1})}, \quad x, y \in M.$$

Пусть $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и M имеет класс гладкости $C^{s+1,1}$ (то есть, функции перехода между координатными системами имеют класс гладкости $C^{s+1,1}$, а метрический тензор класс гладкости $C^{s,1}$). Обозначим $\text{data} := (p_-, p_+, c_{\log}(p), M)$. Через $L^{p(\cdot)}(M, \Lambda)$ и $W^{s,p(\cdot)}(M, \Lambda)$ будем

обозначать пространства Лебега и Соболева с переменным показателем $p(\cdot)$ на M , причем $W^{0,p(\cdot)}(M, \Lambda) = L^{p(\cdot)}(M, \Lambda)$. Норму в пространстве $W^{s,p(\cdot)}(M, \Lambda)$ обозначаем через $\|\cdot\|_{s,p(\cdot),M}$. Пусть ν — единичная “внешняя нормаль”, $t\omega = \nu \lrcorner (\nu \wedge \omega)$, $n\omega = \nu \wedge (\nu \lrcorner \omega)$,

$$(f, g) = \int_M \langle f, g \rangle dV, \quad [f, g] := \int_{bM} \langle \nu \wedge f, g \rangle d\sigma.$$

Для пространства гармонических полей на M используем обозначение $\mathcal{H}(M)$. Пространство гармонических полей с нулевой тангенциальной компонентой на границе обозначаем через $\mathcal{H}_T(M)$.

Теорема 1 (разложение Ходжа). Пусть $\omega \in W^{s,p(\cdot)}(M, \Lambda)$. Тогда существуют $\alpha, \beta \in W^{s+1,p(\cdot)}(M, \Lambda)$ и $h \in W^{s,p(\cdot)}(M, \Lambda) \cap \mathcal{H}(M)$ такие, что $\omega = h + d\alpha + \delta\beta$, причем $t\alpha = 0$, $\delta\alpha = 0$, $n\beta = 0$, $d\beta = 0$ и справедлива оценка

$$\|h\|_{s,p(\cdot),M}, \|\alpha\|_{s+1,p(\cdot),M}, \|\beta\|_{s+1,p(\cdot),M} \leq C(\text{data}, s) \|\omega\|_{s,p(\cdot),M}.$$

Теорема 2 (Системы типа div-rot). Пусть $f, v \in W^{s,p(\cdot)}(M, \Lambda)$ и $\varphi \in W^{s+1,p(\cdot)}(M, \Lambda)$ удовлетворяют $df = 0$, $\delta v = 0$, $(v, h_T) = 0$ и $(f, h_T) = [\varphi, h_T]$ для всех $h_T \in \mathcal{H}_T(M)$, и $t(f - d\varphi) = 0$. Тогда существует решение $\omega \in W^{s+1,p(\cdot)}(M, \Lambda)$ краевой задачи

$$d\omega = f, \quad \delta\omega = v \quad \text{на } M, \quad t\omega = t\varphi \quad \text{на } bM,$$

такое, что для некоторого $C = C(\text{data}, s) > 0$ справедливо

$$\|\omega\|_{s+1,p(\cdot),M} \leq C(\|f\|_{s,p(\cdot),M} + \|v\|_{s,p(\cdot),M} + \|\varphi\|_{s+1,p(\cdot),M}).$$

Теорема 3 (Система Ходжа-Дирака). Пусть $f \in W^{s,p(\cdot)}(M, \Lambda)$ удовлетворяет $(f, h_T) = 0$ для всех $h_T \in \mathcal{H}_T(M)$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда найдется $\omega \in W^{s+1,p(\cdot)}(M, \Lambda) \cap W_T^{1,p(\cdot)}(M, \Lambda)$, удовлетворяющее

$$d\omega + \alpha\delta\omega = f \quad \text{на } M, \quad t\omega = 0 \quad \text{на } bM,$$

такое, что $(\omega, \mathcal{H}_T(M)) = 0$ и выполняется

$$\|\omega\|_{s+1,p(\cdot),M} \leq C(\text{data}, \alpha, s) \|f\|_{s,p(\cdot),M}.$$

Теорема 4 (Оператор типа Боговского). Пусть $f \in W^{s,p(\cdot)}(M, \Lambda)$ и $\varphi \in W^{s+1,p(\cdot)}(M, \Lambda)$ удовлетворяют условиям

$$df = 0, \quad t(f - d\varphi) = 0, \quad (f, h_T) = [\varphi, h_T] \quad \text{для всех } h_T \in \mathcal{H}_T(M).$$

Тогда найдется $\omega \in W^{s+1,p(\cdot)}(M, \Lambda)$ удовлетворяющая $d\omega = f$ на M , краевому условию $\omega = \varphi$ на bM и оценке

$$\|\omega\|_{s+1,p(\cdot),M} \leq C(\text{data}, s)(\|f\|_{s,p(\cdot),M} + \|\varphi\|_{s+1,p(\cdot),M}).$$

Список литературы

- [1] Morrey C.B., Jr., *Multiple integrals in the calculus of variations*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 130. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966
- [2] Schwarz G., *Hodge decomposition—a method for solving boundary value problems*. Lecture Notes in Mathematics 1607, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

ОПТИМАЛЬНАЯ ФОРМА ПРЕПЯТСТВИЯ ПРИ ЕГО ОМЫВАНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

ТИМОХИН Е.В.

МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия

В данной работе проиллюстрирован функционально геометрический метод [1] решения задач со свободной границей. Для простоты выбран объект с простой геометрией, который находится в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Угол наклона данного объекта является параметром управления для минимизации времени омывания наклонного участка контрольной частицей из потока. Построен численный алгоритм и найдена точка минимума функции времени омывания от угла наклона.

Рассмотрена двумерная задача безотрывного обтекания клиновидного выступа на полуплоскости потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью $V_\infty = (1, 0)$. Система отсчета выбрана связанной с клином и для расчетов используется декартова система координат, где ось Ox сонаправлена с набегающим потоком. Точка на наклонном участке клина, которая встречает поток, обозначена O с координатами $(0, 0)$, а провожает - $M(L, 1)$. Угол раствора между осью Ox и наклонной клина OM обозначен θ .

Уравнение движения и условие жескжимаемости жидкости записывается в следующем виде $\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{v}$, $\text{div}\vec{v} = 0$, $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$, где переменная $\vec{z} = \vec{z}_\xi(t) = (x_\xi(t), y_\xi(t)) \simeq z = x + iy \in \mathbb{C}$ обозначает координату или перемещение конкретной частицы с лагранжевой координатой ξ , у которой вектор скорости $\vec{v} = \nabla\varphi(x, y)$, давление p , плотность $\rho = \text{const} = 1$. Интерес представляет выбор угла θ , при котором время $T > 0$ движения частицы жидкости вдоль скоса OM будет минимально при геометрическом ограничении $|OM| \sin \theta = 1$.

Очевидно, что отображение $w : z \mapsto w(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$ однолистно переводит область течения на $\mathbb{C}_+ = \{\text{Im } Z > 0\}$. Поэтому существует как аналитическая функция $Z : w \mapsto z$, такая, что $Z(w(t)) = z(t)$, так и аналитическая функция

$$\ln \frac{dZ}{dw} = A(\varphi, \psi) + i B(\varphi, \psi),$$

где $A = \ln \left| \frac{dZ}{dw} \right|$, а B непрерывная ветвь $\text{Arg} \frac{dZ}{dw}$, однозначная в силу односвязности $\mathbb{C}_+$.

Согласно геометрическому смыслу $\text{Arg} \frac{dZ}{dw}$, в любой точке линии тока $\psi = 0$, имеем $B(w)|_{\psi=0} = B(\varphi) = \theta \cdot \chi_{[\varphi_O, \varphi_M]}(\varphi)$. Гармоническая функция B в полуплоскости $\psi > 0$ с такими кусочно-постоянными граничными условиями при $\psi = 0$ задается формулой

$$B(\varphi + i\psi) = \frac{\theta}{\pi} \left(\text{arccctg} \left(\frac{\varphi_O - \varphi}{\psi} \right) - \text{arccctg} \left(\frac{\varphi_M - \varphi}{\psi} \right) \right)$$

Далее можно найти функцию A , гармонически сопряженную к B , а после и скорость частицы по формуле:

$$\dot{z}(t) = \varphi_x + i \varphi_y = \overline{\varphi_x + i \psi_x} = \overline{\frac{dw}{dZ}} = \left(\frac{dZ}{dw} \right)^{-1} = \overline{Z'(w)^{-1}} = e^{-A+iB}.$$

Для частицы с координатой $z_\xi(t)|_{\xi=0} = z_0(t)$, введем обозначения $\phi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{P(0)}$, $a \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_M$. Упрощенная формула для скорости частицы ξ на линии тока $\psi = 0$ дается

$$\dot{z}_0|_{\psi=0} = \left(\frac{\phi}{a - \phi} \right)^{\theta/\pi} e^{i\theta}. \quad (1)$$

Что касается $\phi = \phi(t)$, то для этой функции из условия $Z(w(t)) = z(t)$ получается дифференциальное уравнение

$$\dot{\phi} - \left(\frac{\phi}{a - \phi} \right)^{2\theta/\pi} = 0, \quad \phi(0) = 0. \quad (2)$$

Отметим, что с учетом (1) геометрическое ограничение

$$|OM| \sin \theta = 1$$

выражается формулой

$$\Phi(a, \theta) = 0, \quad \text{где} \quad \Phi(a, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \sin \theta \int_0^a \left(\frac{\phi(t)}{a - \phi(t)} \right)^{\theta/\pi} dt - 1. \quad (3)$$

Дальнейшее исследование возможно методами численного анализа, который показывает, что минимальное время омывания наклонной OM достигается при $\theta_{\min} = \pi/4$, полученному из расчетов с разной вычислительной погрешностью ϵ .

Список литературы

- [1] Демидов А.С. *Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций*, УМН, 65:1(391) (2010), 3–96.

КОЛЕБАНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ТИМОШИН М.И.

Ульяновский государственный технический университет, Россия
midvolga@mail.ru

Известно [1], что линейное дифференциальное уравнение связано с уравнением Риккати. Так преобразование $z = \frac{y'}{y}$ устанавливает зависимость между каноническими формами уравнений

$$y'' - R(x)y = 0, \quad z' + z^2 = R(x).$$

В работе [2] сформулированы теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы каноническое уравнение Риккати

$$z' + z^2 = R(x) \quad (1)$$

Было интегрируемо в квадратурах, необходимо и достаточно, чтобы функция $R(x)$ была представлена в виде:

$$R(x) = \frac{R_1}{E^2} + \frac{E''}{2E} - \left(\frac{E'}{2E} \right)^2, \quad R_1 = \text{const}, \quad E = E(x).$$

Теорема 2. Дифференциальные уравнения первого порядка допускают точечную симметрию с генератором:

$$X = \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} - \xi(x) \frac{\alpha'_x + \alpha(x, z) \Phi(x)}{\alpha'_z} \frac{\partial}{\partial z},$$

если и только если их можно представить в виде:

$$\xi(x) \theta(x) \left(\alpha'_x + z' \alpha'_z + \alpha \frac{\theta'}{\theta} \right) = F(\alpha \theta(x)), \quad \theta(x) = \exp \left(\int \Phi(x) dx \right).$$

Теорема 2 позволяет выписать общие решения уравнения (1) в зависимости от произвольной функции $E(x)$.

- $R_1 = -a^2, \quad z = \frac{-a \operatorname{tg}(a \int \frac{dx}{E} + C_1)}{E} + \frac{E'}{2E};$
- $R_1 = 0, \quad z = \frac{1}{E(\int \frac{dx}{E} + C_1)} + \frac{E'}{2E};$
- $R_1 = a^2, \quad z = \frac{a + a C_1 \exp(2a \int \frac{dx}{E})}{E(C_1 \exp(2a \int \frac{dx}{E}))} + \frac{E'}{2E}.$

Зная решения уравнения (1), легко выписать соответствующие решения линейного уравнения второго порядка. Введем новую функцию $K(x) = \int \frac{dx}{E}$, позволяющую упростить выражения. Соответствующее линейное уравнение примет вид

$$y'' - \frac{4R_1 K'^4 + 3K''^2 - 2K''' K'}{4K'^2} y = 0. \quad (2)$$

Выпишем варианты решений уравнения (2), в зависимости от знака параметра R_1

- $R_1 = -a^2, \quad y = \frac{C_1 \cos(aK) + C_2 \sin(aK)}{K'^{1/2}};$
- $R_1 = 0, \quad y = \frac{C_1 + C_2 K}{K'^{1/2}};$

- $R_1 = a^2, \quad y = \frac{C_1 \exp(aK) + C_2 \exp(-aK)}{K'^{1/2}}.$

Рассмотрим подробнее первый вариант, описывающий колебательный процесс. Найденную для этого случая функцию можно переписать в виде

$$y = \frac{C_1 \sin(aK + C_2)}{K'^{1/2}}. \quad (3)$$

Представление (3) обладает важной особенностью, у него существует связь между амплитудой и частотой, в этом случае принято говорить о нелинейных колебаниях.

Выражение (3) позволяет построить колебания типа "девятый вал" волна убийца рассмотреть различные типы резонанса.

Список литературы

- [1] Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* / В.В. Степанов - 8 - изд. - Москва: Физико - математической литературы, 1959 - 468с.
- [2] Тимошин М.И. *Точечные и касательные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений:* специальность 01.01.02 "дифференциальные уравнения": Автореферат на соискание кандидата физико - математических наук / Тимошин, М.И. ; Самарский государственный педагогический университет. - Самара, 1996. - 16 с.

ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА БЕСОВА

УШАКОВА Е.П.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
elenau@inbox.ru

Пусть $\alpha > 0$, $p > 1$, $q > 0$, $s \in \mathbb{R}$ и u, v, w веса Мукенхоупта. Рассматривается задача характеристики двойного неравенства

$$\mathcal{C} \|f\|_{B_{pq}^{s-\alpha}(\mathbb{R}, w)} \leq \|I_{\pm}^{\alpha} f\|_{B_{pq}^s(\mathbb{R}, u)} \leq \mathfrak{C} \|f\|_{B_{pq}^{s-\alpha}(\mathbb{R}, v)}$$

для норм в пространствах Бесова с операторами Римана–Лиувилля

$$I_+^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy,$$

$$I_-^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy.$$

Для определения пространств Бесова $B_{pq}^s(\mathbb{R}, u)$ обозначим через $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ топологически двойственное пространство к классу Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ всех комплекснозначных быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$. Далее, зафиксируем такое $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, что $\text{supp } \hat{\varphi} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R} : 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$ и $|\hat{\varphi}(\xi)| \geq c > 0$ для $3/5 \leq |\xi| \leq 5/3$. Положим $\varphi_\nu(x) := 2^{\nu-1} \varphi(2^{\nu-1}x)$, где $\nu \in \mathbb{N}$. Кроме того, выберем $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ с $\text{supp } \hat{\varphi}_0 \subseteq \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq 2\}$ и $|\hat{\varphi}_0(\xi)| \geq c > 0$, $|\xi| \leq 5/3$.

Определение 1. Пространство Бесова $B_{pq}^s(\mathbb{R}, u)$ с весом u из класса Мукенхоупта $\mathcal{A}_r$ ($r \geq 1$) есть совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ таких, что

$$\|f\|_{B_{pq}^s(\mathbb{R}, u)} := \left(\sum_{\nu \in \mathbb{N}_0} 2^{q\nu s} \|\varphi_\nu * f\|_{L^p(\mathbb{R}, u)}^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Здесь $L^p(\mathbb{R}, u)$ весовое пространство Лебега, $f * \varphi_\nu$ свертка, $\hat{\varphi}$ (выше) преобразование Фурье φ . Определение не зависит от выбора φ_0 и φ .

Для формулировки результатов введем в рассмотрение величины:

$$\mathbf{M}_+^{\alpha, l} = \sup_{\tau \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{r \geq \tau} \frac{u(Q_{0r})}{(r - \tau + 1)^{p(1-\alpha)l}} \right)^{1/p} \left(\sum_{r \leq \tau} \frac{[v(Q_{0r})]^{1-p'}}{(\tau - r + 1)^{p'(1-\alpha)(1-l)}} \right)^{1/p'},$$

$$\mathbf{M}_-^{\alpha, l} = \sup_{\tau \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{r \leq \tau} \frac{u(Q_{0r})}{(\tau - r + 1)^{p(1-\alpha)l}} \right)^{1/p} \left(\sum_{r \geq \tau} \frac{[v(Q_{0r})]^{1-p'}}{(r - \tau + 1)^{p'(1-\alpha)(1-l)}} \right)^{1/p'},$$

$$M_{+, u^\downarrow}^\alpha = \sup_{r \in \mathbb{Z}} \frac{\left(\sum_{i \leq r} \frac{u(Q_{0i})}{(r-i+\theta_\alpha)^{1-\alpha}} \left(\sum_{m \leq i} \frac{[v(Q_{0m})]^{1-p'}}{(i-m+\theta_\alpha)^{1-\alpha}} \right)^p \right)^{1/p}}{\left(\sum_{j \leq r} \frac{[v(Q_{0j})]^{1-p'}}{(r-j+\theta_\alpha)^{1-\alpha}} \right)^{1/p}},$$

$$M_{-, v^\uparrow}^\alpha = \sup_{r \in \mathbb{Z}} \frac{\left(\sum_{i \leq r} \frac{[v(Q_{0m})]^{1-p'}}{(r-i+\theta_\alpha)^{1-\alpha}} \left(\sum_{m \leq i} \frac{u(Q_{0i})}{(i-m+\theta_\alpha)^{1-\alpha}} \right)^p \right)^{1/p}}{\left(\sum_{j \leq r} \frac{u(Q_{0j})}{(r-j+\theta_\alpha)^{1-\alpha}} \right)^{1/p}},$$

$$\mathfrak{M}(d; \sigma_1, \sigma_2) = \sup_{\tau \in \mathbb{Z}} [\sigma_1(Q_{(d-1)\tau})]^{-1/p} [\sigma_2(Q_{(d-1)\tau})]^{1/p}.$$

Здесь $Q_{dr} = [2^{-d}r, 2^{-d}(r+1)]$ и $\sigma(Q_{dr}) = \int_{Q_{dr}} \sigma(x) dx$ для веса σ . Обозначение $\sigma^\downarrow$ (или $\sigma^\uparrow$) используется, если $\{\sigma(Q_{0i})\}_{i \in \mathbb{Z}}$ не возрастает (или $\{\sigma(Q_{0i})\}_{i \in \mathbb{Z}}$ не убывает). Также $r_\sigma := \inf\{r \geq 1 : \sigma \in A_r\}$. Для $\alpha \in (0, 1)$ выбирается $\theta_\alpha \in [1/2, 1)$ так, чтобы $2^{\alpha-1} + (\frac{\theta_\alpha+1}{\theta_\alpha})^{\alpha-1} > 1$.

Теорема 1. *Предположим, что $f \in L^1(-\infty, x)$ (или $f \in L^1(x, +\infty)$) для любого $x \in \mathbb{R}$, если рассматривается оператор I_+^α (или I_-^α). (i) Оператор $I_\pm^\alpha$ ограничен из $B_{pq}^{s-\alpha}(\mathbb{R}, v)$ в $B_{pq}^s(\mathbb{R}, u)$, если и только если $\sup_{d \in \mathbb{N}_0} \mathfrak{M}(d; v, u) < \infty$ и $\sum_{i=0,1} \mathbf{M}_\pm^{\alpha,i} < \infty$ для $\alpha \in \mathbb{N}$ и $M_{+,u^\downarrow}^\alpha < \infty$ или $M_{-,v^\uparrow}^\alpha < \infty$ соответственно, если $\alpha \in (0, 1)$. При этом*

$$\|I_{+(-)}^\alpha\| \approx \sup_{d \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}(d; v, u) + \begin{cases} M_{+(-),u^\downarrow(v^\uparrow)}^\alpha, & \alpha \in (0, 1), \\ \mathbf{M}_{+(-)}^{\alpha,0} + \mathbf{M}_{+(-)}^{\alpha,1}, & \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) Пусть $1/C =: \bar{C}$ наилучшая константа неравенства

$$\|f\|_{B_{pq}^{s-\alpha}(\mathbb{R}, w)} \lesssim \bar{C} \|I_\pm^\alpha f\|_{B_{pq}^s(\mathbb{R}, u)}, \quad (1)$$

не зависящая от f , и $\min\{r_w, r_u\} < \alpha p$ в случае $\alpha \in (0, 1)$. Неравенство (1) выполнено $\iff \sup_{d \in \mathbb{N}_0} \mathfrak{M}(d; u, w) < \infty$, при этом $\bar{C} \approx \sup_{d \in \mathbb{N}_0} \mathfrak{M}(d; u, w)$. В частности, $\bar{C} \approx 1$, если $w = u$.

Работа поддержана РНФ (грант <https://rscf.ru/project/24-11-00170/>).

О ТОЧЕЧНОМ СПЕКТРЕ НЕСАМОСOPЯЖЕННОГО КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

ФЕДОТОВ А.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Ст.-Петербург, Россия
a.fedotov@spbu.ru

Доклад основан на работе, выполненной в соавторстве с Д.И. Борисовым (УФИЦ РАН). Рассматривается семейство несамосопряженных операторов Шредингера, действующих в $\ell^2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$(A_\theta(\omega, \lambda)\psi)_n = \psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \lambda e^{-2\pi i(\theta + \omega n)} \psi_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где частота $\omega \in (0, 1)$ и константа связи $\lambda > 0$ – заданные числа, а $\theta \in [0, 1)$ – параметр, индексирующий операторы. Мы считаем, что $\omega \notin \mathbb{Q}$. При этом функция $n \mapsto e^{-2\pi i(\theta + \omega n)}$ является квазипериодической, а семейство $\{A_\theta(\omega, \lambda)\}$ – эргодическим.

Спектральная теория эргодических операторов привлекает богатством эффектов и идей, требуемых для ее построения. Важнейшей ее лабораторией оказывается анализ содержательных конкретных моделей. Семейство операторов $\{A_\theta\}$ ввел П. Сарнак в [1]. Спектр A_θ как множество в комплексной плоскости описывает

Теорема 1. *При $\omega \notin \mathbb{Q}$ спектр A_θ не зависит от θ , и описывается формулами*

$$\sigma(A_\theta(\omega, \lambda)) = [-2, 2] \quad \text{при} \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

$$\sigma(A_\theta(\omega, \lambda)) = \left\{ E \in \mathbb{C} : \frac{(\operatorname{Re} E)^2}{4 \operatorname{ch}^2 \ln \lambda} + \frac{(\operatorname{Im} E)^2}{4 \operatorname{sh}^2 \ln \lambda} = 1 \right\}, \quad \text{при} \quad \lambda > 1. \quad (1)$$

В случае, когда частота является диофантовым числом, теорема 1 доказана в [1]. В [2] она была распространена на случай всех иррациональных частот. В [3] мы показали, что геометрия спектра очень естественно описывается с помощью метода монодромизации – перенормировочного подхода, возникшего при попытке перенести теорию Блоха-Флоке на разностные операторы на оси, см. обзор [4].

Для диофантовых частот в [1] обсуждалась и природа спектра. Показано, что при $\lambda < 1$ нет точечного спектра, а при $\lambda > 1$ эллипс (1) заполнен плотным точечным спектром.

Мы исследовали точечный спектр для разных значений параметров. Для этого изучался разностный оператор на окружности, связанный с A_θ преобразованием Фурье. Доказано отсутствие точечного спектра в случаях, когда $\lambda \leq 1$, и когда $\lambda > 1$, а ω хорошо приближается рациональными числами. Последний случай изучен с помощью метода Гордона-Саймона [5, 6]. С помощью идей перенормировочного подхода, сконструированы собственные функции. Это позволило, во-первых, получить достаточные условия существования точечного спектра нового типа, а во-вторых, детально описать многомасштабную самоподобную структуру собственных функций. В частности, было показано, что преобразование Фурье собственной

функции представляется в виде бесконечного произведения сомножителей, выражающихся через одну и ту же специальную функцию и отличающихся лишь значениями постоянных параметров. Сомножители являются почти периодическими и с ростом номера осциллируют все быстрее и быстрее.

Исследование А.А. Федотова выполнено за счет гранта Российского Научного Фонда (проект 22-11-00092 (Продление), <https://rscf.ru/project/22-11-00092/>).

Список литературы

- [1] Sarnak P. *Spectral behavior of quasiperiodic potentials*. Comm. Math. Phys., 84(1982), 377–401.
- [2] Boca F.P. *On the spectrum of certain discrete Schrödinger operators with quasiperiodic potential*. Duke Math. J., 101(2000), 515–528.
- [3] Borisov D.I., Fedotov A.A. *Monodromization and a $\mathcal{PT}$ -symmetric nonself-adjoint quasi-periodic operator*. Russ. J. Math. Phys. , 30(2023), 294–309.
- [4] Fedotov A.A. *Monodromization method in the theory of almost-periodic equations*. St. Petersburg Math. J., 25(2014), 303–325.
- [5] Гордон А.Я. *О точечном спектре одномерного оператора Шредингера*. Успехи мат. наук, 31(1976), 257–258.
- [6] Simon B. *Almost Periodic Schrödinger Operators IV. The Maryland Model*. Ann. Phys., 159(1985), 157–183.

ПОВЕДЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СУБ-ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ

ФИЛИМОНОВА И.В

МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, Россия
filimi@yandex.ru

Пусть область Ω – ограничена в R^n , $x \in \Omega$, $t > 0$. Коэффициенты $a_{ij}(x)$ ограниченные измеримые функции и удовлетворяют условию равномерной эллиптичности в Ω : $\lambda_1|\xi|^2 < \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j < \lambda_2|\xi|^2$. Функция $a(x) \geq 0$ измерима и ограничена, обозначим

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} a(x) dx = a_0$$

Рассматриваются положительные решения $u(x, t)$, определенные в цилиндрической области $\Omega \times (0, \infty)$, удовлетворяющие условию Неймана на $\partial\Omega \times (0, \infty)$, полулинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a(x)f(u). \quad (1)$$

Функция $f(u)$ – положительна на $(0, \infty)$, монотонно возрастает, и выпукла вверх. Например, $f(u) = u^q$, где $0 < q < 1$.

Параболические и эллиптические уравнения с суб-линейной функцией рассматривались в работах В.А.Кондратьева, Е.М.Ландиса, L. Veron, Y. Belaud, А.Е.Шишкова, Ф.А.Чечкина, Г.В. Гришиной. Но в этих работах доказывались утверждения, о том что при достаточно больших значениях t решения равны 0 при всех $x \in \Omega$. Такие утверждения не верны, если $a(x) = 1 > 0$.

Пусть $\beta(t)$ – решение задачи $\dot{\beta}(t) = a_0 f(\beta)$, $\beta(0) = 1$.

Основной результат, который будет представлен во время доклада:

Теорема 1. Пусть $f(u) > 0$ для $u \in (0, \infty)$, $f(u)/u \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$, $f(u)/u$ монотонно убывает по u на $(0, \infty)$. Пусть также

$$\int_0^\infty \frac{f(u)}{u^2} du < \infty \quad (2)$$

Тогда положительное в $\Omega \times (0, \infty)$ решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию Неймана, стремится к ∞ при $t \rightarrow \infty$ и имеет место формула

$$u(x, t) = (1 + o(1))\beta(t), \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Замечание 1. Точность условия (2) теоремы 1 можно продемонстрировать примером. Функция $f(u) = u/(\ln(u))^p$, где $p > 0$, при достаточно больших u выпукла вверх, условие (2) выполнено при $p > 1$, и не выполнено для $p \in (0, 1]$. Явной выкладкой, можно показать, что для стремящегося к ∞ при $t \rightarrow \infty$ решения, если $a(x) \not\equiv a_0$, формула (3) выполнена если $p > 1$, и представление (3) не верно, если $p \in (0, 1]$. Если $a(x) = \text{const}$ формула (3) определяет решение уравнения (1) при любом $p > 0$.

Формулировка теоремы 1, близка к результатам сформулированным в работах [2] и [1], но в этих работах, рассматривался случай $a(x) < 0$, и нелинейный член обобщал функции вида, $f(u) = u^q$ при $q > 1$. Положительные, удовлетворяющие условию Неймана, решения уравнения (1) с функцией $f(u) = u^q$, $0 < q < 1$ и $a(x) = \text{const} > 0$ рассматривались в [3], где получена более точная, чем (3), асимптотическая формула для решений.

Список литературы

- [1] Кондратьев В.А. *Об асимптотическом поведении решений нелинейных параболических уравнений второго порядка* Труды МИАН, **260**, (2008), 180–192
- [2] Филимонова И.В. *О поведении решений полумлинейного параболического или эллиптического уравнения, удовлетворяющих нелинейному краевому условию, в цилиндрической области* Труды семинара им. И. Г. Петровского, **26**, (2007), 369–390.
- [3] Filimonova I.V. *Asymptotic Behaviour of Positive Solutions of a Semilinear Parabolic Equation* Russian Journal of Mathematical Physics, **10:2** (2003), 234–237.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

ЧЕЧКИН И.Г.^{1,2,a}, НЕЧЕПУРЕНКО Ю.М.^{1,3,b},
ХРИСТИЧЕНКО М.Ю.^{1,4,c}

¹Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва

³Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, Москва

⁴Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва

^aivan.chechkin@math.msu.ru, ^byumnech@yandex.ru, ^cmicha.hrist@rambler.ru

Доклад посвящен линейным дискретным системам управления вида

$$x_k = M_k x_{k-1} + C_k u_k, \quad y_k = O x_k, \quad (1)$$

где M_k — квадратная матрица порядка n , C_k и O — прямоугольные матрицы размеров $n \times n_c$ ($n_c \leq n$) и $n_y \times n$ ($n_y \leq n$) соответственно, x_k — n -компонентный вектор переменных системы, y_k —

n_y -компонентный вектор наблюдения, u_k — n_c -компонентный вектор управления. К таким системам приводят, в частности, дискретизации задач управления для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для системы (1) рассматриваются две следующие задачи оптимального управления

$$\|y_K - y_T\|_2 \leq \varepsilon \|y_T\|_2, \sum_{k=1}^K \|u_k\|_2^2 \rightarrow \min,$$

где y_T — заданный вектор, K — заданное число шагов, ε — заданная точность, и

$$\|y_K\|_2 = 1, \sum_{k=1}^K \|u_k\|_2^2 \rightarrow \min.$$

Предложены оригинальные матричные алгоритмы численного решения этих задач, аналогичные алгоритму, предложенному в [1] для оптимального управления линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа предложенных алгоритмов продемонстрирована на примере задач оптимального управления для известной модели динамики ВИЧ инфекции [2], линеаризованной относительно одного из ее стационарных решений и дискретизированной по времени. В том числе, рассмотрена задача генерации оптимального возмущения этого стационарного решения. Результаты численных экспериментов, представленные в докладе, позволяют сделать вывод о высокой эффективности и надежности предложенных алгоритмов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект №22-71-10028).

Список литературы

- [1] Chechkin I. G., Demyanko K. V., Nечepurenko Yu. M. *Numerical solution of optimal control problems for linear systems of ordinary differential equations*. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 39 (2024), No. 4, 175-185.
- [2] Hadjiandreou M. M., Conejeros R., Wilson I. *HIV treatment planning on a case-by-case basis*. International Journal of Bioengineering and Life Sciences, 3 (2009), No. 8, 387-396.

УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА-КОЛМОГОРОВА И ДИФФУЗИОННЫЕ ПОЛУГРУППЫ

ШАПОШНИКОВ С.В.

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
starticle@mail.ru

Пусть $L_{A,b}u(x) = \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(x) + \sum_{i=1}^d b^i(x)\partial_{x_i}u(x)$, где a^{ij} , b^i — борелевские функции, матрица $A = (a^{ij})$ симметрична и неотрицательно определена. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t \mu_t = L_{A,b}^* \mu_t, \quad \mu_0 = \nu, \quad (1)$$

где ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$. Вероятностным решением называется такое семейство вероятностных мер μ_t на $\mathbb{R}^d$, что выполнено интегральное тождество $\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} f d\nu = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} L_{A,b} f d\mu_s ds$ для всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, и $t \geq 0$. Аналогичным образом определяется решение стационарного уравнения $L_{A,b}^* \mu = 0$. Вероятностное решение может не существовать. Существование вероятностных решений задачи Коши и стационарного уравнения известно при широких условиях (см. [1]), типичные достаточные условия выражены в терминах функций Ляпунова. В случае достаточно регулярных коэффициентов для каждого вероятностного решения σ уравнения $L_{A,b}^* \mu = 0$ существует так называемая каноническая сильно непрерывная полугруппа субмарковских сжимающих операторов $\{T_t^\sigma\}$ на $L^1(\sigma)$, генератор которой продолжает оператор $L_{A,b}$ с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Для $f \geq 0$ функция $T_t^\sigma f$ является минимальным неотрицательным решением задачи $\partial_t u = L_{A,b} u$, $u(x, 0) = f(x)$ (см. [2]).

Пусть $d = 1$, $A = 1$ и $b \in C^1(\mathbb{R})$. Предположим, что существует стационарное вероятностное решение $\varrho(x) = e^{-W(x)}$, причем $W \in C^2(\mathbb{R})$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} W(x) = +\infty$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} W'(x)e^{-W(x)} = 0$.

Теорема 1. *В рассматриваемой ситуации для всякой вероятностной меры ν существует вероятностное решение задачи Коши (1).*

Пусть $d \geq 1$. Предположим, что 1) для всякой борелевской вероятностной меры ν на $\mathbb{R}^d$ задача Коши (1) имеет единственное вероятностное решение, 2) для дираковских начальных условий $\nu = \delta_u$ решение $\mu_{u,t}$ является борелевской функцией двух переменных.

Теорема 2. Пусть σ - вероятностное решение стационарного уравнения $L_{A,b}^* \mu = 0$. Тогда на пространстве $L^1(\sigma)$ существует такая сильно непрерывная марковская операторная полугруппа $\{T_t\}$, что для всякой ограниченной борелевской функции f борелевская версия $T_t f$ в $L^1(\sigma)$ может быть задана формулой $T_t f(u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu_{u,t}(dx)$ причем мера σ инвариантна относительно этой полугруппы. Если коэффициенты A и b непрерывны, то генератор полугруппы в $L^1(\sigma)$ продолжает оператор $L_{A,b}$ с области $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Доказательства теорем 1 и 2 представлены в работе [3].

Пусть $d = 1$, $\sigma = e^{-W} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$, $A = 1$ и $b(x) = -x - 6e^{x^2/2}$. По теореме 1 и теореме 2 на $L^1(\sigma)$ имеется сильно непрерывная марковская полугруппа операторов $\{T_t\}_{t \geq 0}$, относительно которой мера σ инвариантна и генератор которой совпадает с $L_{A,b}$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$. Однако соответствующая каноническая полугруппа $\{T_t^\sigma\}_{t \geq 0}$ не является марковской, а мера σ не инвариантна относительно нее. До сих пор вопрос о существовании таких примеров был открыт (см. [4]).

Список литературы

- [1] Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V. *Fokker–Planck–Kolmogorov equations*. Amer. Math. Soc., Rhode Island, Providence, 2015, xii+479 pp.
- [2] Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В. *О единственности вероятностных решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова*, Матем. сб., 212:6 (2021), 3–42.
- [3] Богачев В.И., Шапошников С.В. *Об однозначно разрешимых уравнениях Фоккера–Планка–Колмогорова*. Известия РАН. 2025.
- [4] Богачев В.И., Рёкнер М., Штаннат В. *Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий*. Матем. сб., 197:7 (2002), 3–36.

Authors Index

Akhmetiev P.M.	pmakhmet@mail.ru	6
Apushkinskaya D.E.	apushkinskaya@gmail.com	7
Astashova I. V.	ast.diffiety@gmail.com	8
Astashova I.V.	ast.diffiety@gmail.com	10
Azhmoldaev G.F.	azhmoldaevgf@gmail.com	12
Bashurov V.V.	woonniethepih@yahoo.com	14
Bekmaganbetov K.A.	bekmaganbetov-ka@yandex.kz	12
Borisov D.I.	borisovdi@yandex.ru	16
Bouabsa A.	ayabouabsa670@gmail.com	18
Bratus A.	alexander.bratus@yandex.ru	19
Bravyi E.	bravyi@perm.ru	19
Bystrov D. V.	danil.bystrovv@gmail.com	21
Chechkin G.A.	chechkin@mech.math.msu.su	12
Chepyzhov V.V.	chep@iitp.ru	12
Dudnikova T.V.	tdudnikov@mail.ru	22
Efremova L.S.	lefunn@gmail.com	24
Faminskii A.V.		25
Filinovskiy A.V.	flnv@yandex.ru	10
Finogenko I.A.	fin2709@mail.ru	27
Gabidullin D.A	david0166@yandex.ru	29
Gladkov A.	gladkoval@mail.ru	31
Glubokikh A.V.	a.glubokikh@g.nsu.ru	33
Glutsyuk A.	aglutsyu@ens-lyon.fr	70
Golubyatnikov V.P.	Vladimir.Golubyatnikov1@fulbrightmail.org	33
Gorshkov A.V.	alexey.gorshkov.msu@gmail.com	35
Hoang L.	luan.hoang@ttu.edu	37
Ibragimov A.	Ilya1Sergey@gmail.com	37
Kaptsov E.I.	evgkaptsov@math.sut.ac.th	38
Kapustina T.	tatiana.kapustina@math.msu.ru	40
Kibkalo V.	slava.kibkalo@gmail.	42
Kon'kov A.A.	konkov@mech.math.msu.su	44
Korobko E.	jakovi300195@yandex.ru	46
Koroleva Yu.O.	yo.koroleva@hse.ru	48
Kurasov P..	kurasov@math.su.se	50

Lashin D.A.	dalashin@gmail.com	10
LeFloch P.G.	contact@philippelefloch.org	51
Manikandan K.		72
Manikandan K.		51
Meleshko S.V.	sergey@math.sut.ac.th	38
N. Begun	nikitabegun88@gmail.com	53
Nikishov V. A.	nikishov1999@yandex.ru	8
Oshemkov A.	a@oshemkov.ru	42
Partsvania N.	nino.partsvania@tsu.ge	53
Podobryaev A.V.	alex@alex.botik.ru	54
Polyakov D.M.	dmitrypolyakow@mail.ru	16
Prokopenko O.D.	olga.prokopenko.2011@mail.ru	56
Pskhu A.V.	pskhu@list.ru	58
Rastegaev N. V.	rastmusician@gmail.com	60
Rautian N.A.	nrautian@mail.ru	61
Romanov M.S.	mcliz@mail.ru	62
Rossovskii G. L.	grossovski@yandex.ru	64
Rozanova O.S.	rozanova@mech.math.msu.su	66
Rykov Yu.G.	yu-rykov@yandex.ru	68
Sabari S.		51
Sachkov Yu.	yusachkov@gmail.com	70
Sadyrbaev F.	felix@latnet.lv	70
Sakkaravarthi K.	ksakkaravarthi@gmail.com	72
Sakkaravarthi K.		51
Sedykh V. D.	vdsedykh@gmail.com	74
Sengileyev V.		70
Senik N. N.	nnsenik@gmail.com	75
Shaposhnikova T.A.		75
Shcheglova A.P.	apshcheglova@etu.ru	76
Shishkov A.E.	aeshkv@yahoo.com	44, 78
Stepanov V.D.	stepanov@mi-ras.ru	79
Sudhir Singh		72
Tersenov Ar.S.	aterseno@math.nsc.ru	80
Turzynsky M.K.	m13041@yandex.ru	66
Tussupbekova E.	elmira.tussupbekova@gmail.com	81
Vaskevich V. L.	v.vaskevich@g.nsu.ru	84

Zhuzhoma E.	zhuzhoma@mail.ru	85
Аксенов А.В.	aksenov@mech.math.msu.su	85
Алзамили Х.Ф.	almazili.khitam@mail.ru	87
Аллилуева А.И.	esina_anna@list.ru	89
Алхутов Ю.А.	yurij-alkhutov@yandex.ru	91
Антонов Н.А.	antonovna@my.msu.ru	93
Апаев М.Р.	apayevmr@gmail.com	95
Артамонов Д.В.	artamonov.dmitri@gmail.com	97
Астапов Е.А.	ast-ea@yandex.ru	98
Бадерко Е.А.	baderko.ea@andex.ru	99
Байдулов В.Г.	baydulov@gmail.com	100
Безродных С.И.	sbezrodnykh@mail.ru	102, 241
Бжеумихова О.И.	bzhoksana@gmail.com	104
Бондарев А.А.	albondarev1998@yandex.ru	106
Бондаренко Н.П.	bondarenkonp@sgu.ru	108
Бондарь А.А.	anna.alex.bondar@gmail.com	138
Боровских А.В.	aleksey.borovskikh@math.msu.ru	109
Бровкин В.В.	brovvadim2015@gmail.com	111
Булатов Ю.Н.	y.bulatov@bk.ru	210
Бутерин С.А.	buterinsa@sgu.ru	113, 115
Быков В.В.	vvbykov@gmail.com	249
Варин В.П.	varin@keldysh.ru	117
Васильев В.В.	vbv57@inbox.ru	118
Васильева А.А.	vasilyeva_nastya@inbox.ru	120
Васильева Е.В.	e.v.vasilieva@spbu.ru	122
Ветохин А.Н.	anveto27@yandex.ru	123
Войтицкий В.И.	voytitskiy_vi@pfur.ru	125
Галкин В.А.	val-gal@yandex.ru	127
Ганжаева М.Ш.	m.ganzhaeva@g.nsu.ru	138
Георгиевский Д.В.	georgiev@mech.math.msu.su	128
Голубятников А.Н.	golubiat@mail.ru	130
Гордеева Н.М.	nmgordeeva@bmstu.ru	102
Городницкий Е.А.	evgeny.gorodnitskiy@gmail.com	234
Гребенева А.А.	agrebenevaa@yandex.ru	131
Гришина Г.В.	gggrishina@bmstu.ru	133
Гуревич Е.Я.	egurevich@hse.ru	135

Гусев Н.А.	ngusev@phystech.su	137
Демиденко Г.В.	demidenk@math.nsc.ru	138
Денисов А.М.	den@cs.msu.ru	139
Денисюк В.А.	v.denisyuk@g.nsu.ru	141
Доброхотов С.Ю.	s.dobrokhотов@gmail.com	143
Долгова Е.С.	dolgova.es@ssau.ru	144
Дородный М.А.	mdorodni@yandex.ru	145
Дракулаки Г.	yum600@mail.ru	115
Духновский С. А.	sergeidukhnvskij@rambler.ru	268
Егорова А.Ю.	ayu_egorova@mail.ru	147
Ежак С.С.	Ezhak.SS@rea.ru	148
Жижина Е.А.	elena.jijina@gmail.com	151
Жуйков К.Н.	zhuykovcon@gmail.com	153
Жуковский Е.С.	zukovskys@mail.ru	154
Загребина С.А.	zagrebinasa@susu.ru	272
Зайцева Н.В.	zaitseva@cs.msu.ru	156
Загора Д.А.	dmitry.zkr@gmail.com	157
Захаров С.А.	zaharovsa@my.msu.ru	130
Звягин А.В.	zvyagin.a@mail.ru	158
Зейфман А.И.	a_zeifman@mail.ru	160
Зубова С.П.	spzubova@mail.ru	162
Ильин Ю.А.	iljin_y_a@mail.ru	164
Искаков Т.К.	istima92@mail.ru	166
Кабанихин С.И.	ksi52@mail.ru	167, 200
Каляев Т.Д.	timur.kalyayev@gmail.com	169
Камынин В.Л.	vlkamynin2008@yandex.ru	171
Капцов О.В.	profkap@mail.ru	173
Карулина Е.С.	karulinaes@ya.ru	175
Качкина А.В.	alisa-kachkina@mail.ru	177
Кипкаева О.С.	kipkaeva.os@ssau.ru	179
Кирсанова А.С.	askirsanova99@gmail.com	180
Князьков Д.Ю.	knyaz@ipmnet.ru	100
Кожанов А.И.	kozhanov@math.nsc.ru	182
Кожанов А.И.	kozhanov@math.nsc.ru	183
Кожевникова Л.М.	kosul@mal.ru	185
Кондюков А.О.	a.kondukov@novsu.ru	274

Коненков А.Н.	an.konenkov@gmail.com	187
Конечная Н.Н.	n.konechnaya@narfu.ru	221
Коннова К.А.	k.a.konnova@mail.ru	188
Кордюков Ю.А.	yurikor@matem.anrb.ru	190
Коровина М.В.	betelgeuser@yandex.ru	192
Костин А.Б.	abkostin@yandex.ru	194
Костин Г.В.	kostin@ipmnet.ru	196
Коструб И.Д.	ikostrub@yandex.ru	198
Криворотько О.И.	o.i.krivorotko@math.nsc.ru	200
Кулаев Р.Ч.	kulaevrch@mail.ru	202
Куликов А.Н.	anat_kulikov@mail.ru	204
Куликов Д.А.	kulikov_d_a@mail.ru	204
Леднов А.П.	lednovalexsandr@gmail.com	206
Лексин В.П.	lexin_vp@mail.ru	208
Ляхов Л.Н.	levnlya@mail.ru	210, 212
Манита Л.А.	lmanita@hse.ru	254
Матвеева О.П.	oltan.72@mail.ru	214
Матвеева И.И.	i.matveeva@g.nsu.ru	215
Махрова Е.Н.	elena_makhrova@inbox.ru	217
Маштак А.П.	alexey.mashtakov@gmail.com	219
Мирзоев К.А.	mirzoev.karahan@mail.ru	221
Мищулович А.А.	st062829@student.spbu.ru	223
Мукминов Ф.Х.	mfarith@yandex.ru	224
Назайкинский В.Е.	nazaikinskii@googlemail.com	143
Назаров А.И.	al.il.nazarov@gmail.com	226
Нечепуренко Ю.М.	yumnec@yandex.ru	290
Никулин Е.И.	nikulin@physics.msu.ru	227
Носиков И.А.	igor.nosikov@gmail.com	143
Палин В.В.	grey_stranger84@mail.ru	229
Панкратова Е.В.	epankratova213@gmail.com	231
Панов Е.Ю.	evpanov@yandex.ru	232
Патрина А.С.	lanina.anastasiia5@mail.ru	154
Перель М.В.	m.perel@spbu.ru	234
Перескоков А.В.	pereskokov62@mail.ru	236
Перов А.И.	anperov@mail.ru	198
Петров В. Э.	petrov_twell@list.ru	238

Петров Ф. В.	fedypetrov@mail.ru	238
Петухов В. С.	vladimir@sycore.org	240
Пикулин С.В.	spikulin@gmail.com	241
Пламеневский Б.А.	b.plamenevskii@spbu.ru	243
Платонова К.С.	kseniya-plat@yandex.ru	109
Плышевская С.П.	splyshevskaya@mail.ru	243
Поляков Д.М.	DmitryPolyakow@mail.ru	245
Попова С.Н.	udsu.popova.sn@gmail.com	247
Порецкий А.С.	a.poretsky@spbu.ru	243
Похачевский В.А.	pokhachevskiy@gmail.com	249
Починка О.В.	olga-pochinka@yandex.ru	251
Пятницкий А.Л.	apiatnitski@gmail.com	151
Раецкая Е.В.	raetskaya@inbox.ru	162
Родина Л.И.	LRodina67@mail.ru	252
Ронжина М.И.	ronzhina.m@gubkin.ru	254
Рощупкин С.А.	roshupkinsa@mail.ru	212
Сабитов К.Б.	sabitov_fmf@mail.ru	256
Савин А.Ю.	a.yu.savin@gmail.com	153
Сакбаев В.Ж.	fumi2003@mail.ru	258
Самохин В.Н.	avt428212@yandex.ru	260
Сарафанов О.В.	o.sarafanov@spbu.ru	243
Сафонова Т.А.	t.Safonova@narfu.ru	262
Сахаров С.И.	ser341516@yandex.ru	99
Сачков Ю.Л.	yusachkov@gmail.com	240
Сергеев И.Н.	igniserg@gmail.com	264
Сидоров С.Н.	stsid@mail.ru	266
Ситник С. М.	mathsms@yandex.ru	268
Скворцова М.А.	sm-18-nsu@yandex.ru	269
Слоущ В.А.	v.slouzh@spbu.ru	151, 270
Струков М.И.	mixail.strukov12@gmail.com	158
Сукачева Т.Г.	tamara.sukacheva@novsu.ru	272, 274
Сулейманов Б.И.	bisul@mail.ru	276
Султанов О.А.	oasultanov@gmail.com	277
Сурначев М.Д.	peitsche@yandex.ru	278
Суслина Т.А.	t.suslina@spbu.ru	145, 151
Тельнова М.Ю.	mytelnova@yandex.ru	148

Тимохин Е.В.		280
Тимошин М.И.	midvolga@mail.ru.....	282
Толченников А.А.	tolchennikovaa@gmail.com.....	143
Ушакова Е.П.	elenau@inbox.ru.....	284
Фаддеева Н.М.	faddeevanina@gmail.com.....	270
Фахразиева Э.А.	elmiraf12@mail.ru.....	247
Федотов А.А.	a.fedotov@spbu.ru.....	286
Филимонова И.В.	filimi@yandex.ru.....	288
Христиченко М.Ю.	micha.hrist@rambler.ru.....	290
Чечкин И.Г.	ivan.chechkin@math.msu.ru.....	290
Чечкина А.Г.	chechkina@gmail.com.....	91
Чжу Д.	zhudq1002@163.com.....	139
Шадрина Н. Н.	shadrinann8@yandex.ru.....	183
Шамаев А.С.	sham@rambler.ru.....	100
Шапошников С.В.	starticle@mail.ru.....	292
Шафареvич А.И.	shafarev@yahoo.com.....	89
Шишкина Э.Л.	shishkina@amm.vsu.ru.....	87
Шишленин М.А.	m.a.shishlenin@mail.ru.....	167
Щепакина Е.А.	shchepakina@ssau.ru.....	179

Научное издание

**Международная конференция,
посвященная памяти
И. Г. Петровского**

**25 совместное заседание Московского математического
общества и Семинара имени И. Г. Петровского**

Москва, 19 – 24 мая 2025 г.

Тезисы докладов

Компьютерная верстка и подготовка оригинал-макета: PHP
7.0.33-79+0~20250311.103+debian12~1.gbpa0f8bd, #1 SMP
PREEMPT_DYNAMIC Debian 6.1.129-1 (2025-03-06) GNU/Linux.
Дизайн обложки: Плешанов Е.В.